民國叢書

第二編

·89·

科學技術史類

中算史論叢

李儼著

上海書店

中算史論叢

（一）

李儼著

序

年來研治中算史,其論文之發表於各雜誌者,計有十餘篇.意在廣徵海內明達之見,俾獲折衷之說.惟各文刻非一時,收集爲難.而初稿遺譌及印刷錯誤之處,又往往而有.玆特輯錄成册,以便就正當世.此册所收者,計有下列各篇:

中算家之Pythagoras定理研究(學藝雜誌第八卷第二號,十五年十月,第一至二七頁);重差術源流及其新註(學藝雜誌第七卷第八號,十五年四月,第一至一五頁);大衍求一術之過去與未來(學藝雜誌第七卷第二號,十四年九月,第一至四五頁);敦煌石室「算書」(中大季刊第一卷第二號,十五年六月,第一至四頁);明代算學書志(圖書館學季刊第一卷第四期,十五年十二月,第六六七至六八二頁);明清之際西算輸入中國年表(圖書館學季刊第二卷第一期,十六年十二月,第一至三四頁);對數之發明及其東來(科

學雜誌，第十二卷第二號，第三號，第六號，十六年二月，三月，六月，第一〇九至一五八頁，第二八五至三二五頁，第六八九至七〇一頁）；中算輸入日本之經過（東方雜誌第二二卷第一八號，十四年九月，第八二至八八頁）；梅文鼎年譜（清華學報第二卷第二期，十四年十二月，第六〇九至六三四頁）。

中華民國十七年二月十日

李儼記於隴寶

目次

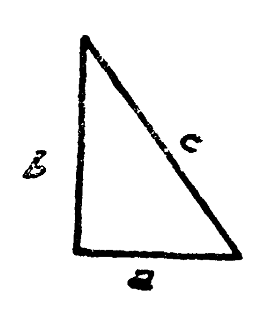
中算家之Pythagoras定理研究

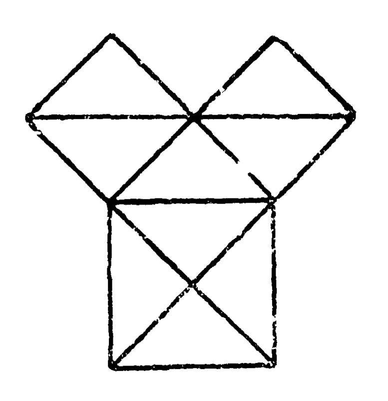
目 次

1. Pythagoras定理本事

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 定理者,句冪股冪合成弦冪,如圖句 $=a$, 股 $=b$, 弦 $=c$, 則 $a^2+b^2=c^2$ 是也.德國數學史家 Mortitz Cantor 在所著 Vorlesungen über

Geschichte der Mathematik, Vol. I (三版), Leipzig, 1907, p. 108 謂埃及於公元二千年前已知正三角形句股弦之比爲 $a:b:c=3:4:5$. Pythagoras (公元前 580?-500?) 生於希臘薩摩斯 (Samos), 曾遊埃及, 其 $a:b:c=3:4:5$ 之說或亦得諸埃及. 嘗立學校於南意大利之克洛吞(Croton), 後爲政客所忌, 逃亡而被殺於麥塔逢坦 (Metapotum). Pythagoras 氏定理證法今已無傳, 或以爲如右圖以等邊三角爲計算. 至幾何原本之證法, 則出於歐幾里(Euclid). 希臘以後證此定理實繁有人. 其詳可觀 Joh. Jos. Jgn. Hoffmann, Der Pythagoräische Lehrsatz mit zwey und dreysig theils bekannten, theils neuen Beweisen. Mainz, 1819, 及 Jury Wipper, Sechsundvierzig Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes. Aus dem Russischen von F. Graap, Leipzig, 1800. 而收羅較富, 則爲 F. Yanney 及 J. A. Calderhead 見於 Am. Math. Monthly, Vols. 3 及 4, 1896 及 1897 者. 北京高師數理雜誌第二卷第一至四號(1920-1921)





王邦珍君「Pythagoras 定理之證明」一文,亦載有六十法,惜於吾國算家對此定理之研究,未嘗收錄.此篇之作,則介紹國中研究此定理之經過耳.

2 周髀算經與 Pythagoras 定理

周髀算經約為戰國前著作,其原因茲不具述.僅言其與 Pythagoras 定理之關係.按周髀本文:「商高曰,數之法出於圓方,圓出於方,方出於矩,矩出於九九八十一.故折矩以為句廣三,股修四,徑隅五,既方其外半之一矩,環而共盤得成三,四,五.兩矩共長二十有五,是謂積矩,……」.此言 $a:b:c=3:4:5$ 也.又曰:「周髀長八尺,夏至之日晷一尺六寸,髀者股也,正晷者句也,……故以句為首,以髀為股,……若求邪至日者,以日下為句,日高為股,句股各自乘,并而開方除之,得邪至日,從髀所旁至日所十萬里」,此言 $c=\sqrt{a^2+b^2}$, 即 $a^2+b^2=c^2$ 也.又曰:「法曰周髀長八尺,句之損益寸千里,……榮方曰,周髀者何?陳子曰,古時天子治周,此數望之從周,故曰周髀.」關於周髀二字之考據,大都以髀為股.如廣韻卷三,紙第四,「髀股也,又步米切」,唐·房玄齡晉書卷十一,「髀股也,股者表也」,唐·長孫無忌隋書卷十九,亦言「髀股

也,股者表也」,說文段注,「股髀也,又曰髀骨猶言股骨」是也.日本飯島忠夫支那古代史論第七章(1925)因鄭玄注儀禮聘禮「宮必有碑,所以識日景引陰陽也」,謂碑與髀通.惟漢·劉熙釋名「釋典藝第二十」明言「碑,被也.此本王莽時所設也,施其轆轤,以繩被其上,以引棺也,……」,似此則飯島之說不能成立.至周之爲解則周髀本文明言「古時天子治周,此數望之從周,故曰周髀」,唐·房玄齡晉書,唐·長孫無忌隋書并言「其本庖犧氏立周天曆度,其所傳則周公受於殷商,周人志之,故曰周髀」,宋李籍周髀算經音義稱「周天曆度,本庖犧氏立法,其傳自周公受之於大夫商高,故曰周髀」,宋·陳振孫直齋書錄解題卷十二「曆象類」周髀算經二卷,音義一卷條下稱「周髀者蓋天之書也,稱周公受之商高,而以句股爲術,故曰周髀」,此一說也.亦有以周爲環,如唐·房玄齡晉書,及宋·李籍周髀算經音義并言「……每衡周經里數,各依算術用句股重差,推晷影極游,以爲遠近之數,皆得於表股者也,故曰周髀.」清·陳杰算法大成上編(1844金望欣序)卷二「句股」稱「句股之法,始於周髀算經……周,環也,髀

股也,環其股以爲法,遂名爲句股云,〔句者曲也……〕」.此又一說也.

3. 九章算經與Pythagoras定理.

九章算經所述Pythagoras定理問題見卷九句股章.清·陳杰以爲句股出於周髀說見前節.漢·鄭玄釋周禮地官保氏九數云:「九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,句股」,此言漢時有重差,夕桀,句股各術,卽九章算經卷九句股章亦爲漢時所增也.魏·劉徽注九章於句股稱「短面曰句,長面曰股,相與結角曰弦,句短其股,股短其弦,將以施於諸率,故先具此術以見其源也.」,宋·李籍九章算術音義句股注稱「句短面也,股長面也,短長相推以求其弦,故曰句股」,九章本文句股「術曰,句股各自乘,幷而開方除之,卽弦」, 卽 $c=\sqrt{a^2+b^2}$, 由此化得 $a=\sqrt{c^2-b^2}$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$, $\frac{a^2}{c-b}=c+b$, $\frac{b^2}{c-a}=c+a$, 四式, 其餘和較雜糅, 則未及也. 至句股弦相與之率,於 $3^2+4^2=5^2$ 外,幷知 $5^2+12^2=13^2$, $7^2+24^2=25^2$, $8^2+15^2=17^2$, $20^2+21^2=29^2$ 焉.劉徽圖注,僅存其注,舊圖已佚.

九章又言帶從開方,如第二十問爲 $x^2+(14+20)$

$x=2(1775\times 20)$ 是也。

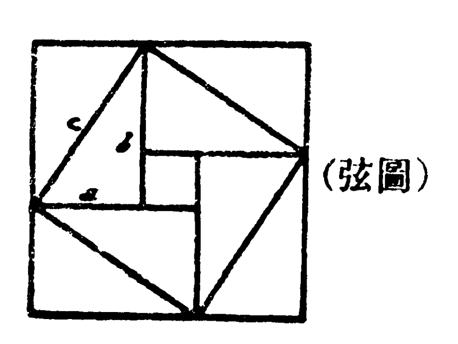
4. 句股方圓圖注.

趙爽字君卿一曰名嬰,宋·李籍謂「不詳何代人」,宋·鮑澣之疑爲「魏,晉之間人」,清·阮元謂「今本周髀算經題」云漢·趙君卿注,故系於漢代,日本·三上義夫因其周髀注有法出九章之語,知其習知九章算經之法.茲將其「句股方圓圖注」分左右兩列解釋如下.

「趙君卿曰,句股各自乘,併之爲弦實,開方除之,即弦也.」

令 $a=$ 句, $b=$ 股, $c=$ 弦, 如題意

$a^2+b^2=c^2$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cdots(1)$



(弦圖)

如弦圖, $2ab+(b-a)^2=c^2$, $\cdots\cdots\cdots(2)$

「案弦圖,又可以句股相乘爲朱實二,倍之爲朱實四,以句股之差自乘爲中黃實,加差實,亦成弦實.」

此與印度·巴斯卡剌,阿剌雅 (Bhaskara Acarya) 在一一五〇年所證明者相類.

「以差實減弦實,半其餘.以差爲從法,開方除之,復得句矣,加差於句卽股.」

從(2)得 $\frac{c^2-(b-a)^2}{2}=ab=A$ ……………………………………(3)

令 $b-a=p,\quad a=x.$

則 $x^2+px-A=0$ ………(4)

$x+p=b.$

「凡幷句股之實,卽成弦實,或矩於內,或方於外,形詭而量均,體殊而數齊」

「句實之矩,以股弦差爲廣,股弦幷爲袤,而股實方其裏,減矩句之實於弦實,開其餘卽股.倍股在兩邊爲從法,開矩句之角,卽股弦差,加股爲弦.」

$(c-b)(c+b)=c^2-b^2=a^2=B$ ……………………………………(5)

$\sqrt{c^2-(c-b)(c+b)}=b,$

令 $2b=q,\quad a-b=y,$

則 $y^2+qy-B=0$ ………(6)

$y+b=c$

「以差除句實,得股弦幷.以幷除句實,亦得股弦差.」

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^2}{c-b}&=c+b\\ \frac{a^2}{c+b}&=c-b\end{aligned}\right\}\text{……………}(7)$$

「令幷自乘,與句實爲實,倍幷爲法,所得亦弦,句實減幷自乘,如法爲股.」

$$\left.\begin{aligned}\frac{(c+b)^2+a^2}{2(c+b)}&=c,\\ \frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}&=b,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\ (8)$$

……………………………

「兩差相乘,倍而開之,所得以股弦差增之爲句,以句弦差增之爲股,兩差增之爲弦.」

$$\sqrt{2(c-a)(c-b)}=a+b-c\cdots\cdots\cdots\ (9)$$

「倍弦實,列句股差實見弦實者,以圖考之;黃實之多,卽句股差實,以差實減之,開其餘,得外大方.大方之面卽句股幷也.令幷自乘,倍弦實,減之,開其餘得中黃方.黃方之面,卽句股差.」

$$2c^2-(a+b)^2=(b-a)^2\ \cdots(10)$$

$$\sqrt{2c^2-(b-a)^2}=a+b=s\cdots\cdots\cdots\ (11)$$

$$\sqrt{2c^2-(a+b)^2}=b-a=t\cdots\cdots\cdots\ (12)$$

「以差減幷,而半之爲句.加差於幷,而半之爲股.」

$$\frac{s-t}{2}=a\cdots\cdots\cdots\ (13)$$

$$\frac{s+t}{2}=b\cdots\cdots\cdots\ (14)$$

「其倍弦爲廣袤合,而令句股見者自乘爲其實,四實以減之,開其餘,所得爲差.以差減合,半其餘爲廣.減廣於弦,卽所求也.」

因 $2c=y(=c-b)+y_1(=c+b)$ ……………………(15)

而 $yy_1=a^2$ …………… (16)

則 $\sqrt{4c^2-4a^2}=y_1-y$ …(17)

$$y=\frac{2c-\sqrt{4c^2-4a^2}}{2} \quad \cdots\cdots (18)$$

則 $b=c-y$.

5. 劉徽九章注.

魏·陳留王景元四年(263)注九章算術,於「句股術」注曰「句股冪合以成弦冪」,又曰,「句自乘爲朱方,股自乘爲青方,令出入相補,各從其類,因就其餘不移動也,合成弦方之冪,開方除之卽弦也.」,又曰,「……句長而股短,故術以木長謂之句,圍之謂之股,言之倒互,句與股求弦,亦如前圖;句三自乘爲朱冪,股四自乘爲青冪,合朱青二十五爲弦五自乘冪,出上,第一圖句股冪合爲弦冪明矣.然二冪之數謂倒互於弦冪之中,而已可更相表裏,居裏者則成方冪,其居表者則成矩冪,二表裏形訛而數均.又按此圖句冪之矩,朱卷居裏,是其冪以股弦差爲實,股弦并爲袤,而股冪方其裏.股冪之矩,青卷居表,是其

冪以句弦差爲廣,句弦并爲袤,而句冪方其裏.是故差之與并除之,短長互相乘也.」以上據宋·楊輝詳解九章算法,文與算經十書本略異.

劉徽於「今有戶高多於廣六尺八寸,兩隅相去適一丈,門戶高廣各幾何.答曰,廣二尺八寸,高九尺六寸.」題注曰:「令戶廣爲句,高爲股,兩隅相去一丈爲弦.高多於廣六尺八寸爲句股差冪,開方除之,其所得卽高廣并數,以差減并而半之,卽戶廣,加相多之數,卽戶高也.」

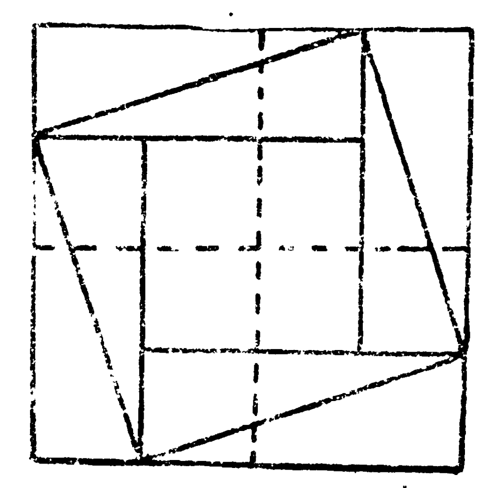
「今此術先求其半一丈自乘,爲朱冪四,黃冪一,半差自乘又倍之,爲黃冪四分之一,減實半其餘,有朱冪二,黃冪四分之一,其於大方乘四分之三,適得四分之一,故開方除之,得高廣并數之半,減差半得廣,加得戶高.」

如弦圖

$$\frac{1}{2}\left[c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]$$

$$=2\times\frac{ab}{2}+\frac{(b-a)^2}{4}$$

$$=\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$



其所解說實開宋,元演段之源,楊輝於此題又設二圖,另見後節.按劉徽九章注屢言及「圖」,今則有注無圖,蓋已亡失,今借弦圖以爲說明,證以下文「其句股合而自乘之冪,令弦自乘倍之爲兩弦冪,以減之,其餘開方除之,爲句股差,……其出於此圖也」之語,卽言 $\sqrt{2c^2-(a+b)^2}=b-a=t$,……(12)及「其(弦)實以句股差冪減,半其餘,差爲從法,開方除之,卽句也」,卽 $x^2-(b-a)x=\dfrac{c^2-(b-a)^2}{2}$,或言 $x^2+px-A=0$,……(4),蓋亦本於弦圖也.劉徽又曰:「其倍弦爲廣袤合,矩句卽爲冪,得廣卽句股差,合其矩句之冪,倍爲從法,開之亦句股差」,清·戴震以「廣袤合」,「矩句」語見趙君卿周髀注,亦謂劉說本於趙君卿也.

6. 漢·唐算家之論述

唐·房玄齡晉書卷十一天文志稱「古言天者有三家:一曰蓋天,二曰宣夜,三曰渾天.漢靈帝時蔡邕於朔方上言:宣夜之學,絕無師法,周髀術數具存,……蔡邕所謂周髀者,卽蓋天之說也,……周人志之,故曰周髀.」淮南子天文訓亦如周髀之法以測日高,蔡邕所謂術數具存,非虛語也.至尙書考靈曜,洛書甄曜度,書之眞僞,雖尙待考,其言天高八萬里

一本周髀之說.厥後渾天之說雖盛,而句股法尙長存也.晉書卷十一,天文志稱「吳時中常侍廬江王蕃善數術,傳劉洪乾象曆,依其法而制渾儀,立論考度曰;……周百四十二,而徑四十五,……以句股法言之,旁萬五千里句也,立極八萬里股也,從日邪射陽城弦也,以句股求弦法入之,得八萬一千三百九十四里三十步五尺三寸六分,天徑之半,而地上去天之數也.」

(蓋 $\sqrt{\overline{15000}^2+\overline{80000}^2}=81394$ 里,10298

因 古法一里 =300 步, =81394 里, 30 步, 894

一步 =6 尺, =81394 里, 30 步, 5 尺, 3 寸, 6 分.)

「倍之得十六萬二千七百八卜八里六十一步四尺七寸二分天徑之數也,以周率乘之,徑率約之,得五十一萬三千六百八十七里六十八步一尺八寸二分,周天之數也減.

(蓋 $\frac{142}{45}\times2\times81394$ 里, 30 步, 5 尺, 3 寸, 6 分 =

$\frac{142}{45}\times162788$ 里, 61 步, 4 尺, 7 寸, 2 分 =

51368 里, 68 步, 1 尺, 8 寸, 2 分 (?).).

唐·瞿曇悉達開元占經卷一「天體渾宗」篇,所引亦同,此則應用於測天也.

句股之法,魏·劉徽(263)應用之以求圜率,用六角形起算,南齊·祖冲之(429－500)更求其密,得$\pi=3$,14159265. 其在算術,則張丘建算經卷下「今有鹿直西走」及「今有垣高一丈三尺五寸」題,并應用$3^2+4^2=5^2$以爲計算,甄鸞注五經算術卷上「周官車蓋法」條「甄鸞按,句股之法,橫者爲句,直者爲股,邪者爲弦.若句三則股四而弦五,此自然之率也.……求之法,句股各自乘并而開方除之,卽弦也.……假令句三自乘得九,股四自乘得十六,併之得二十五,開方除之得五弦也」其注周髀算經亦申述此義.此後唐·王孝通緝古算經卷末「假令有句股相乘冪」以下各問,其所計算略涉繁複,如

15. 句股形中,已知ab, $c-a$, 求a,b,c.

因 $b^2=c^2-a^2=(c-a)(c-a+2a)$,

故 $\dfrac{a^2b^2}{2(c-a)}=\dfrac{a^2[(c-a)+2a]}{2}=\dfrac{c-a}{2}\cdot a^2+a^3$.

16. 句股形中,已知ab, $c-b$求c.

$$\frac{a^2b^2}{2(c-b)}=\frac{c-b}{2}\cdot b^2+b^3,\text{ 又 } b+(c-b)=c.$$

17. 句股形中,已知ac, $c-b$, 求b.

$$a^2c^2=(c^2-b^2)[(c-b)+b]^2,$$

$$=[(c-b)(c-b+2b)][(c-b)+b]^2.$$

故　$\frac{a^2c^2}{2(c-b)}-\frac{(c-b)^3}{2}=2(c-b)$ [illegible] $\frac{5}{2}(c-b)b^2$ [illegible]。

18. 句股形中，已知 bc，$c-a$，求 a。

如前　$\frac{b^2c^2}{2(c-a)}-\frac{(c-a)^3}{2}=2(c-a)$ [illegible] $\frac{5}{2}$ [illegible] a^3。

19. 句股形中，已知 bc，及 a 求 b。

$b^2c^2=b^2(a^2+b^2)$

故　$b^2c^2=a^2b^2+b^4$。

20. 句股形中，已知 ac，及 b 求 a。

如前　$a^2c^2=b^2a^2+a^4$。

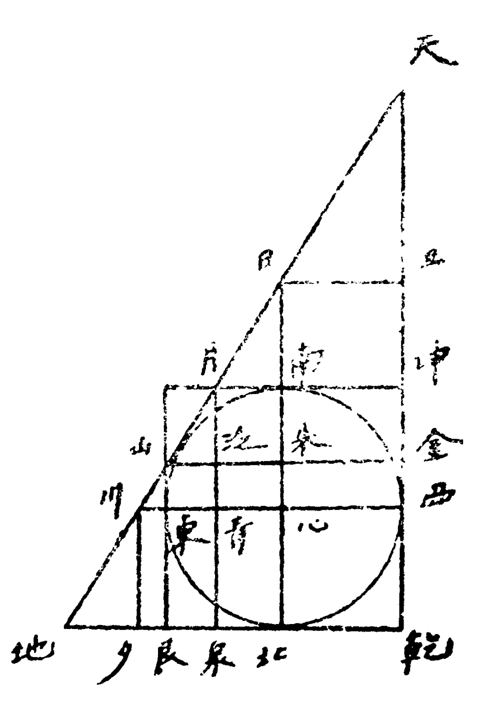
是也.至唐·李淳風注釋周髀算經，九章算術卷九「句股」則無多新說.

7. 宋·元算家之論述

宋，元算家亦論句股形.如元·李治測圓海鏡十二卷(1248)，「以句股容圓爲題，自圓心圓外縱橫取之得大小十五形皆無奇零」，如通△天地乾，天地爲通弦，天乾爲通股，乾地爲通句，而所取之句股弦幷爲 $8^2+15^2=17^2$ 之倍數，如通弦 $=40\times17$，通股 $=40\times15$，通句 $=40\times8$ 是也.所得十五形·

	弦，c	句，a	股，b
大或通△天地乾	680	320	600
邊△天川西	544	256	480

底	△日地北	425	200	375
黃廣	△天山金	510	240	450
黃長	△月地泉	272	128	240
上高	△天日旦	255	120	225
下高	△日山朱	255	120	225
上平	△月川青	136	64	120
下平	△川地夕	136	64	120
大差	△天月坤	408	192	360
小差	△山地艮	170	80	150
(皇)極	△日川心	289	136	255
(太)虛	△月山泛	102	48	90
明	△日月南	153	72	135
叀	△山川東	34	16	30



其「释名」則

句 $=a$,

股 $=b$,

弦 $=c$,

黃 $=a+b-c$

$=$ 黃方 $=$ 內容圓徑 $=$ 圓 $=r$。

句股和 $=$ 和 $=a+b$,

$=$ 弦黃和 $=(a+b-c)+c$。

句股較 $=$ 差 $=$ 較 $=$ 中差 $=b-a$。

$=$ 雙差較 $=(c-a)-(c-b)$。

雙差 $=$ 大差 $+$ 小差。

句弦和 $=a+c$

句弦較 $=c-a$

$=$ 大差 $=$ 股黃較 $=$ 股黃差 $=b-(a+b-c)$。

股弦和 $=b+c$

股弦較 $=c-b$

$=$ 小差 $=$ 句黃較 $=$ 句黃差 $=a-(a+b-c)$。

弦較和 $=c+(b-a)$

$=$ 股較和 $=b+(c-a)$,

$=$ 句和較 $=(b+c)-a$。

弦較較 $=c-(b-a)=c-b+a$。

$=$ 股和較 $=(c+a)-b$。

$=$ 句較和 $=(c-b)+a$。

弦和和 $=$ 總和 $=$ 三事和 $=a+b+c$。

$=$ 句和和 $=(b+c)+a$,

$=$ 股和和 $=(a+c)+b$。

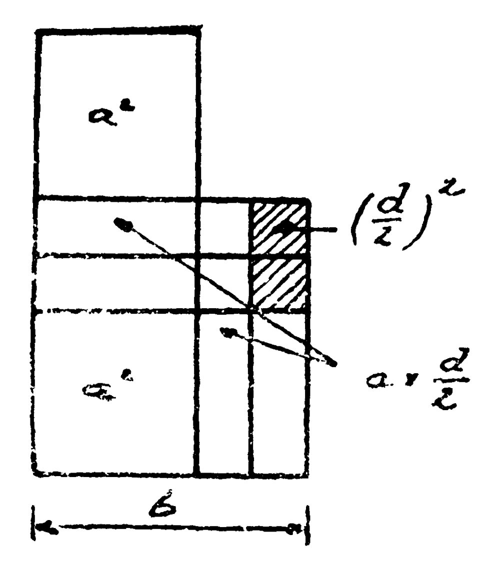
弦和較 $=$ 黃 $=$ 黃方 $=$ 圓徑 $=a+b-c=r$。

= 句較較 $=a-(c-b)$，

= 股較較 $=b-(c-a)$。

李治以時人有益古集之作,以爲其蘊猶匿而未發,因爲之移補條目,釐定圖式,演爲六十四題,都爲三卷,踵其原名,曰益古演段,自序在己未(1259)夏六月.演段之說得稍具獨立之義,實自此始.

宋·楊輝田畝比類乘除捷法卷下(1275)亦應用周髀弦圖謂「演段曰,和自乘有四段直田積,一段差方積,所以用四積減和,餘得差方一段,卻取方田」,此言 $(a+b)^2=4ab+(b-a)^2$. 蓋出於劉益之議古根源.其於詳解九章算法(1261)句股章「今有戶高多於廣六尺八寸,……」題,已知句股較 $d=b-a$, 弦 $=c$, 求股 $=b$. 如圖



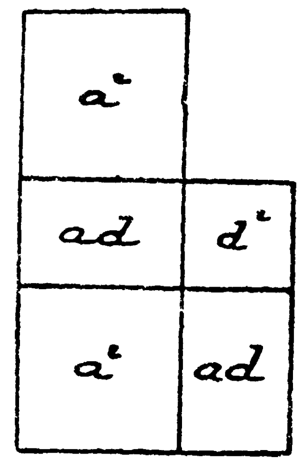
$$c^2=a^2+b^2$$

$$=2a^2+4\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+4a\cdot\frac{b-a}{2}$$

$$=2a^2+4\left(\frac{d}{2}\right)^2+4\left(a\times\frac{d}{2}\right).$$

故楊輝曰:「弦自乘,變句冪二,半較冪四,半較乘句四」.又如圖中於弦圖內減兩段

$\left(\frac{d}{2}\right)^2$,半之,或$\left(a+\frac{d}{2}\right)$之平方,開方得$a+\frac{d}{2}$,故可得$a$及$b$.此一法也.



同題,因$c^2=2a^2+d^2+2ad$如圖楊輝曰:「弦自乘,變二句冪,及句股較乘句二段,句股較冪一段」.因已知c,及d,又令$a=x$,則得

$x^2+dx=\frac{c^2-d^2}{2}$之帶從平方,卽二次方程式.

元·朱世傑撰算學啓蒙三卷,分二十門,立二百五十九問,首總括無卷數,大德己亥(1299)趙城序而梓傳焉.其卷下開方釋鎖門第八問,「今有直田八畝五分五釐,只云長平和得九十二步,問長平各幾何.答曰,平三十八步,長五十四步.」朱世傑註稱「按此以古法演之,和步自乘得八千四百六十四,乃是四段直積,一段較冪也,列積四之,得八千二百八,減之,餘有較冪二百五十六為實,以一為廉,平方開之,得較一十六步,加和半之得長,長內減較卽平也.」此亦應用周髀弦圖,言$(a+b)^2=4ab+(b-a)^2$,當與楊輝同出於劉益之議古根源,其第八問以下數問,幷利用弦圖以為演段,至朱世傑乃以天元演其細草,故

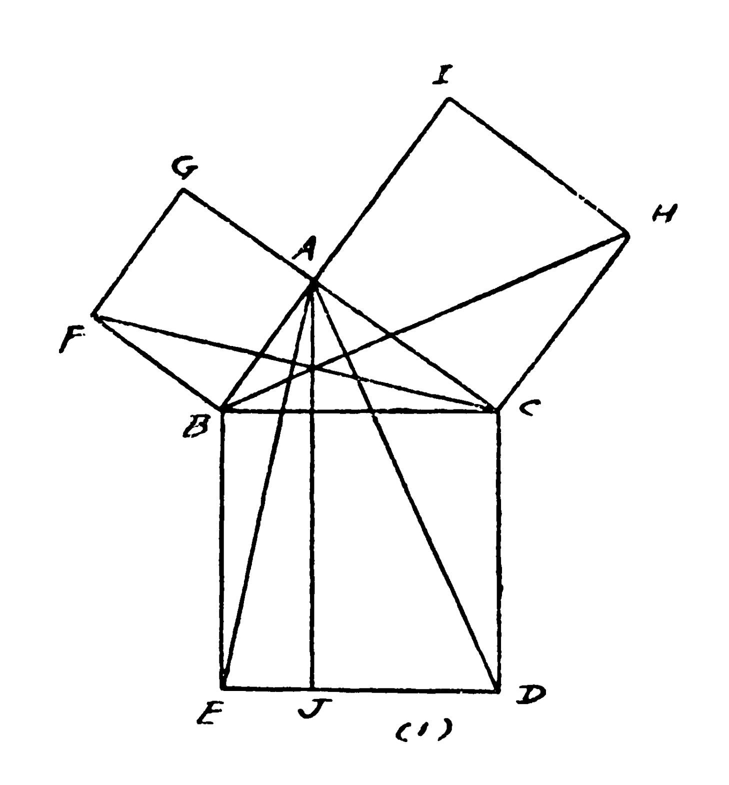
朱世傑又註稱「今以天元演之,明源活法,省功數倍,假立一算於太極之下,如意求之,得方廉隅從正負之段,乃演其虛積,相消相長,而脫其眞積也.予故於逐問備立細草,圖其縱橫,明其正負,使學者粲然易曉也.」其後又著四元玉鑑三卷,分門二十有四,立問二百八十,大德癸卯(1303)臨川莫若序而傳焉.卷前「四元自乘演段之圖」亦立句三,股四,弦五,黃二爲問,卷上「直段求源」,「混積問元」,「和分索隱」,卷中「明積演段」,卷下「兩儀合轍」,「左右逢元」,「三才變通」,雖幷以句股爲問,實已脫前此演段法移補湊合之途徑,進爲純粹之代數解析法矣.

元·納速剌丁(Abû Dscha far Muhammed ibn Hasan al Tûsi, 1201−1274)亦嘗證Pythagoras定理,見Biblioth. Mathem. 1892, pp. 3−4, H. Suter氏論文中,爲Hoffmann及Wipper二氏所未收.

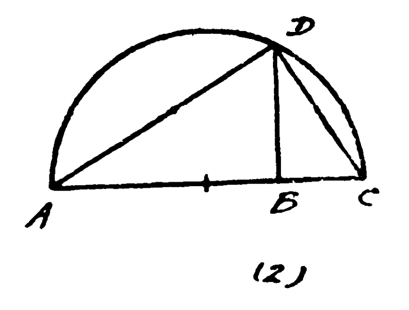
8. 明·清算家之論證上

明代算學頗爲衰廢,明·趙開美校周髀算經,唐順之(1507−1560)唐荊川先生文集卷十一,「數論三篇」內「句股測望論」,顧應祥(1483−1565)句股算術(1533)卷上,周述學神道大編曆宗算會卷三「句股」,

雖亦論句股,僅引述成言.程大位算法統宗(1593)卷六「長闊相加求和圖」下,「演段解曰;四因積者,乃是四長四闊積,居邊,……却以相差,……自乘得,……補中,得相和積,……開方除之,得長闊相和,……」,亦襲宋,元算士舊說.直至明季利瑪竇(Matteo Ricci,1529-1610)來華,與其徒徐光啓(1562-1633)同譯幾何原本前六卷(1607),其卷一第四十七題證 Pythagoras 定理,如圖(1).又卷六第十三題,「兩直線求別作一線爲連比例之中率」,如圖(2),BD 爲 AB, BC 線之中率,即

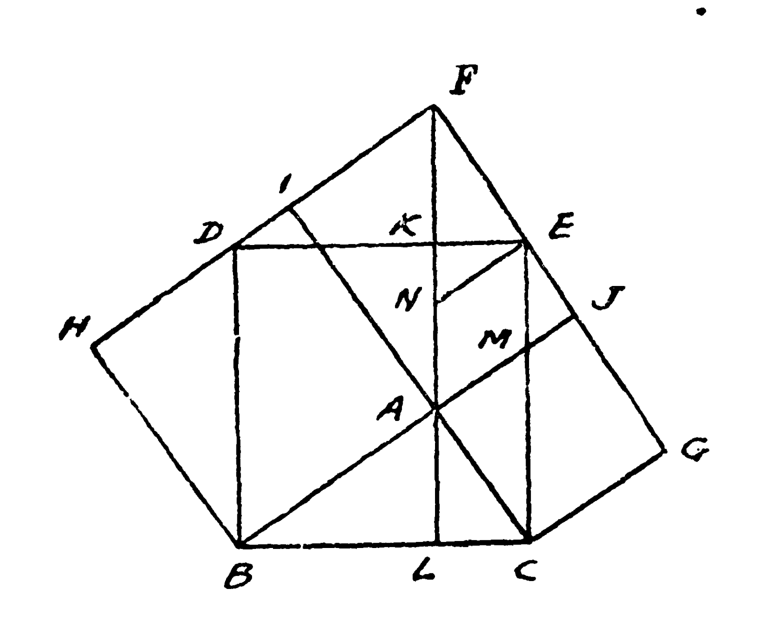


(1)



(2)

$$\frac{\text{首率}\ BC}{\text{中率}\ BD}=\frac{\text{中率}\ BD}{\text{末率}\ AB}.$$



徐光啓因撰句股義乃圖解句股和較相求等凡十五條,有法有論,頗能應用幾何原本,以盡演段法移補湊合之意.先是崇禎己巳(1629)明廷從徐光啓之請,徵西洋人入京修曆.崇禎四年(1631)進測量全義十卷,卷中有Pythagoras定理證法,如圖正$\triangle ABC$求$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$,先由$A$點垂直於$BC$線,分$\overline{BC}^2$弦方爲兩矩形.

因 $\triangle ALB=\triangle FKD$,	又因 $\triangle ALC=\triangle FKE$,
$\therefore$ $\square BK=\square AD$.	$\therefore$ $\square LE=\square AE$.
又 $\triangle FIA=\triangle HDB$,	又 $\triangle AFI=\triangle CEG$,
$\square AD=\square AH$,	$\square LE=\square AG$,
$\therefore$ $\square BK=\overline{AB}^2$.	$\therefore$ $\square LE=\overline{AC}^2$.

$$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2.$$

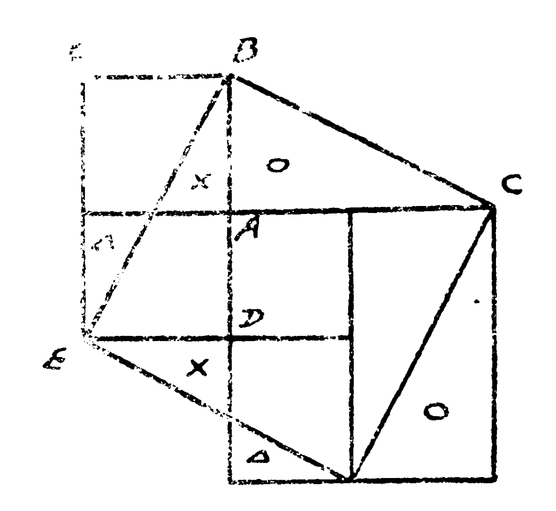
入清則兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書中句股闡微,首卷係楊作枚補.有Pythagoras定理證法.

如圖證 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$.

因 $(\triangle BDE-X)+\triangle+X+O+\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(\triangle BFE)+\triangle+O+\overline{BC}^2$,

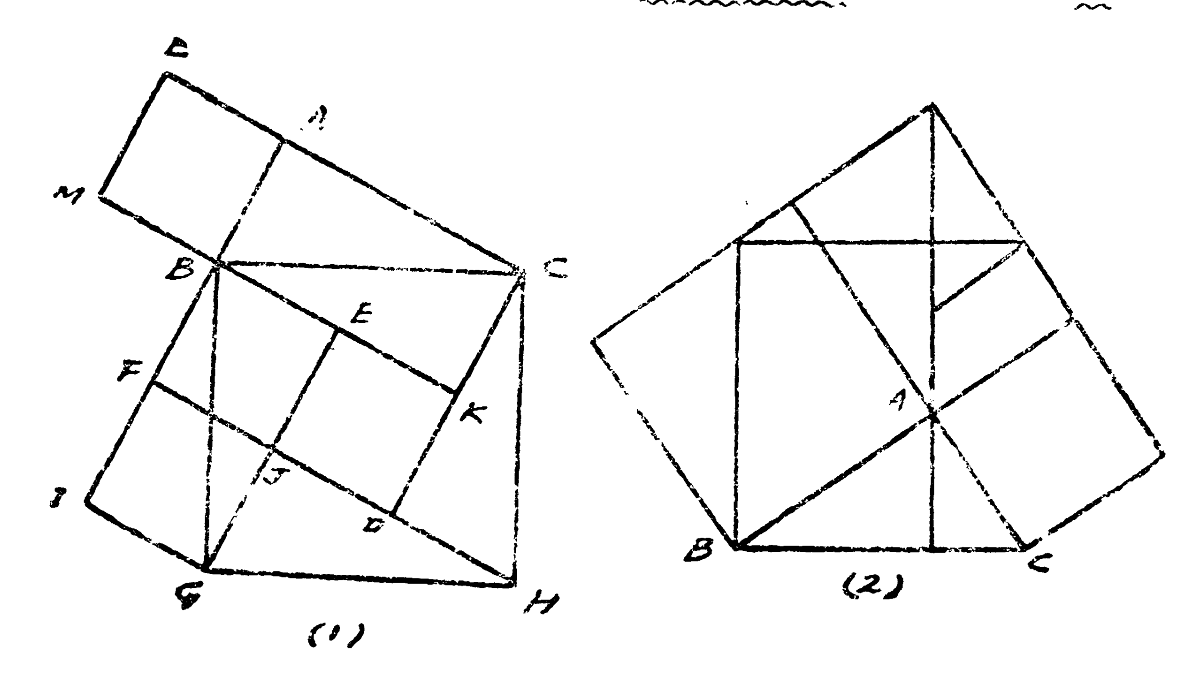
因 $(\triangle BDE)=(\triangle DFE)$,

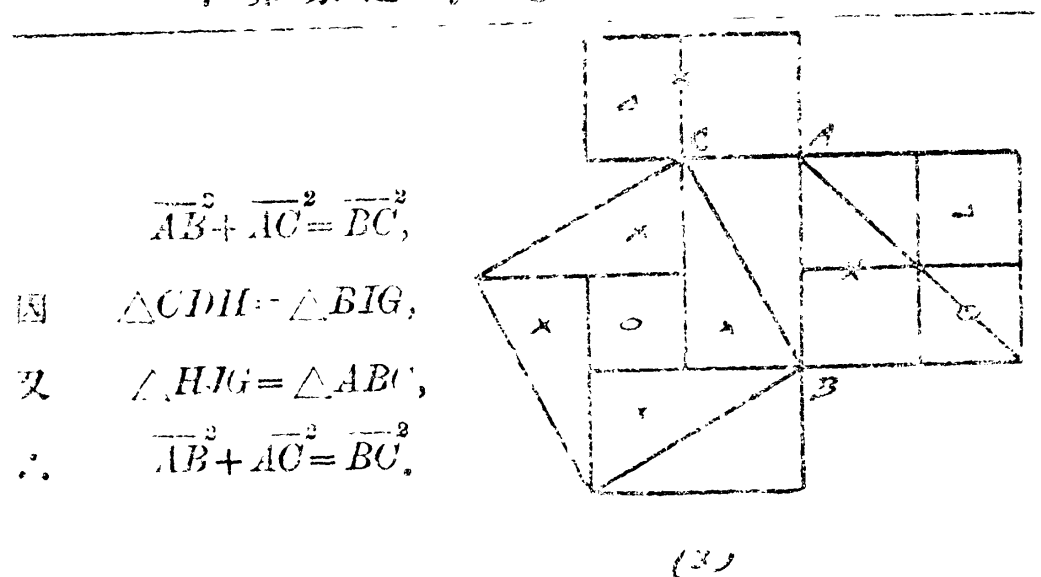
又圖中 $\triangle$, X, O, 彼此相等. $\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$.



此外又設一圖,則爲相傳之弦圖,茲不具錄.

兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書中句股闡微,二卷後則梅文鼎(1633-1721)之書.其卷三有(1),(2),(3)三圖,就中(2)圖出於測量全義,(3)圖本解幾





$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2,$$

因　$\triangle CDH=\triangle BIG,$

又　$\triangle HIG=\triangle ABC,$

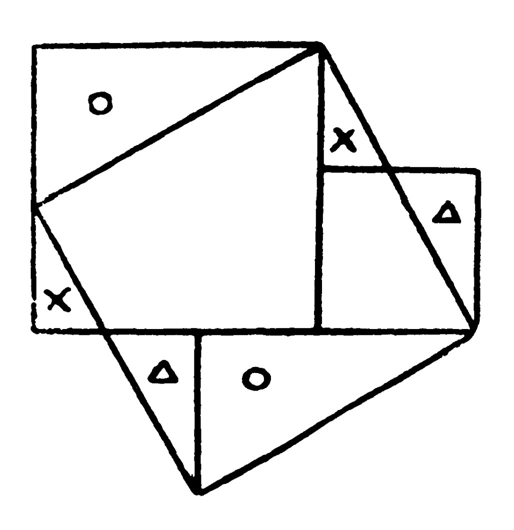
∴　$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2.$

(3)

何二卷第七題，亦可借用以證 Pythagoras 定理. (1)、(2)，(3) 圖又見於梅氏叢書輯要卷十之句股舉隅.

并時著作，如方中通數度衍(1661)卷六「句股」，李子金算法通義(1676)卷一，杜知耕數學鑰(1681)卷六「句股」，陳訏(1650—1732)句股述(1683)，屠文漪九章錄要卷十一之二，均無新說. 下至戴震(1724—1777)九章算術卷九「訂訛補圖」，尚不免以幾數較衍，補設一圖. 其餘若屈曾發九數通考(1772)，梅沖句股淺述(1797 自序)，駱騰鳳(1770—1841)藝游錄(1843 刻)，許桂林(1778—1821)算牖(1811)之因襲舊說，自無論矣. 直至李銳(1768—1817)，李潢(—1811)，安清翹(1759—1830)，項名達(1789—1850)，陳杰始各補一圖. 李銳句股算術細草(1806 自序)細草外，每題有解. 篇首設圖以證

Pythagoras 定理.李潢九章算術細草圖說(1820 刻)馮桂芬弧矢算術細草圖解(1839)因之.



安淸翹矩線原本(1818)卷二「測量篇上」,如圖

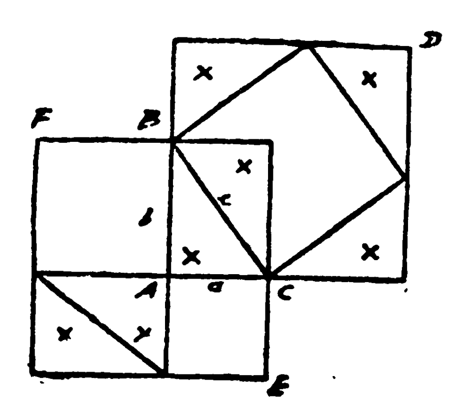
上方$\square AD=$下方$\square EF$,

因 $(a+b)^2=(a+b)^2$,

又 上方$\square AD=c^2+4\cdot\frac{ab}{2}$,

下方$\square EF=a^2+b^2+4\cdot\frac{ab}{2}$,

$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$.

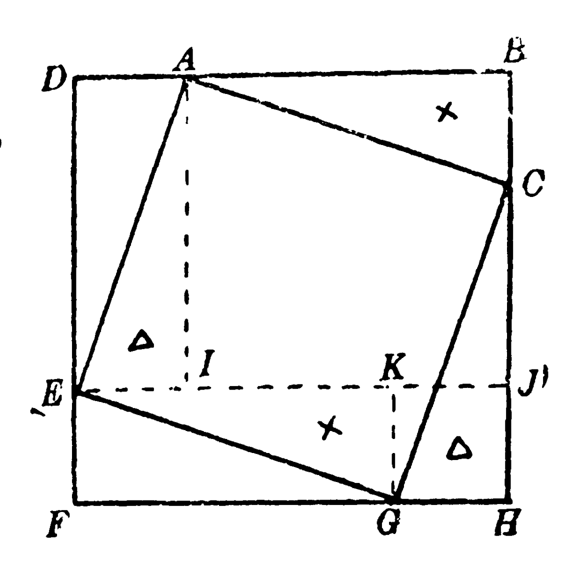


何夢瑤算迪(約 1820)卷二,有下圖:

因 $\overline{AB}^2=\square BI$,

$\overline{GH}^2=\overline{BC}^2=\square KH$,

$\overline{AC}^2=\square AG$.



又因 $\triangle ABC=\triangle EGK$,

$\triangle GHC=\triangle AEI$,

$\therefore \quad \overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$.

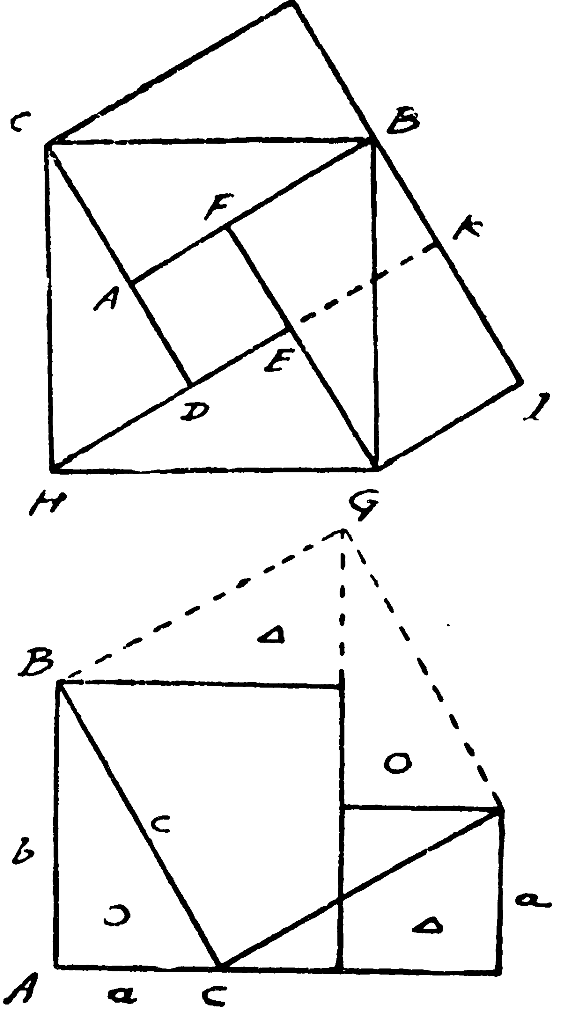
項名達句股六術圖解

(1825)第一術,如圖:

$\square BH+\triangle BJC+\triangle GIB=\square KG+\square DJ+\triangle CHD+\triangle HEG$.

因 $\triangle BJC+\triangle GIB=\triangle CHD+\triangle HEG$,

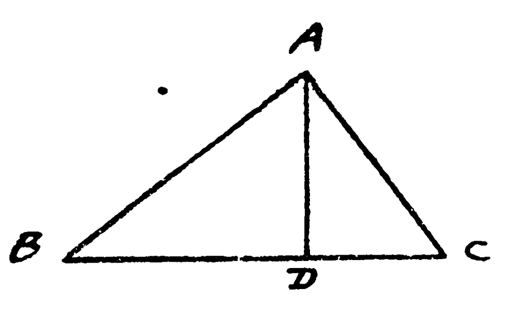
$\therefore \overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$.



陳杰算法大成上編(1844金望欣序)卷二,「句股」,如圖 $\triangle+O+a^2+b^2=\triangle+O+c^2$,

$\therefore \overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2.$

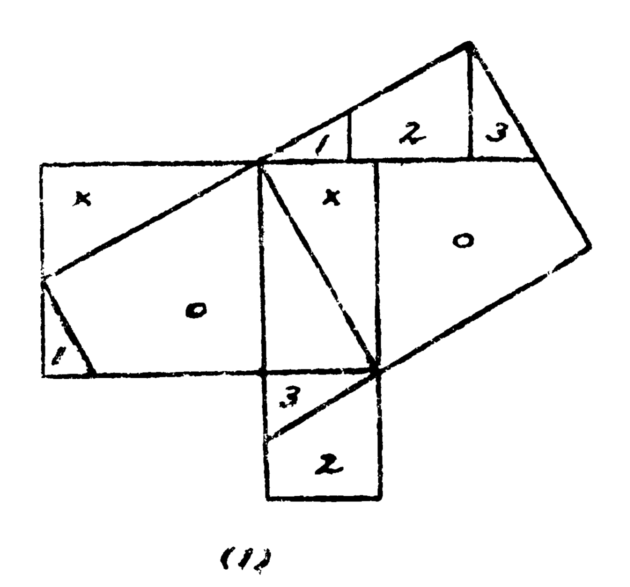
李善蘭(1810–1882,據張鳴珂疑年賡錄卷二)則古昔齋算學(1867刻)第十三,天算或問卷一,如圖,自 A 作垂直於 BC,得 D 點,則 $\triangle ABD$, ADC, ABC 爲相似,



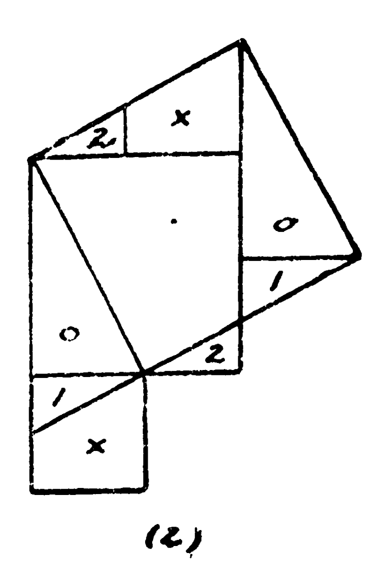
即 $$\frac{\overline{AC}^2}{\triangle ADC}=\frac{\overline{AB}^2}{\triangle ABD}=\frac{\overline{BC}^2}{\triangle ABC},$$

$$\therefore \overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2.$$

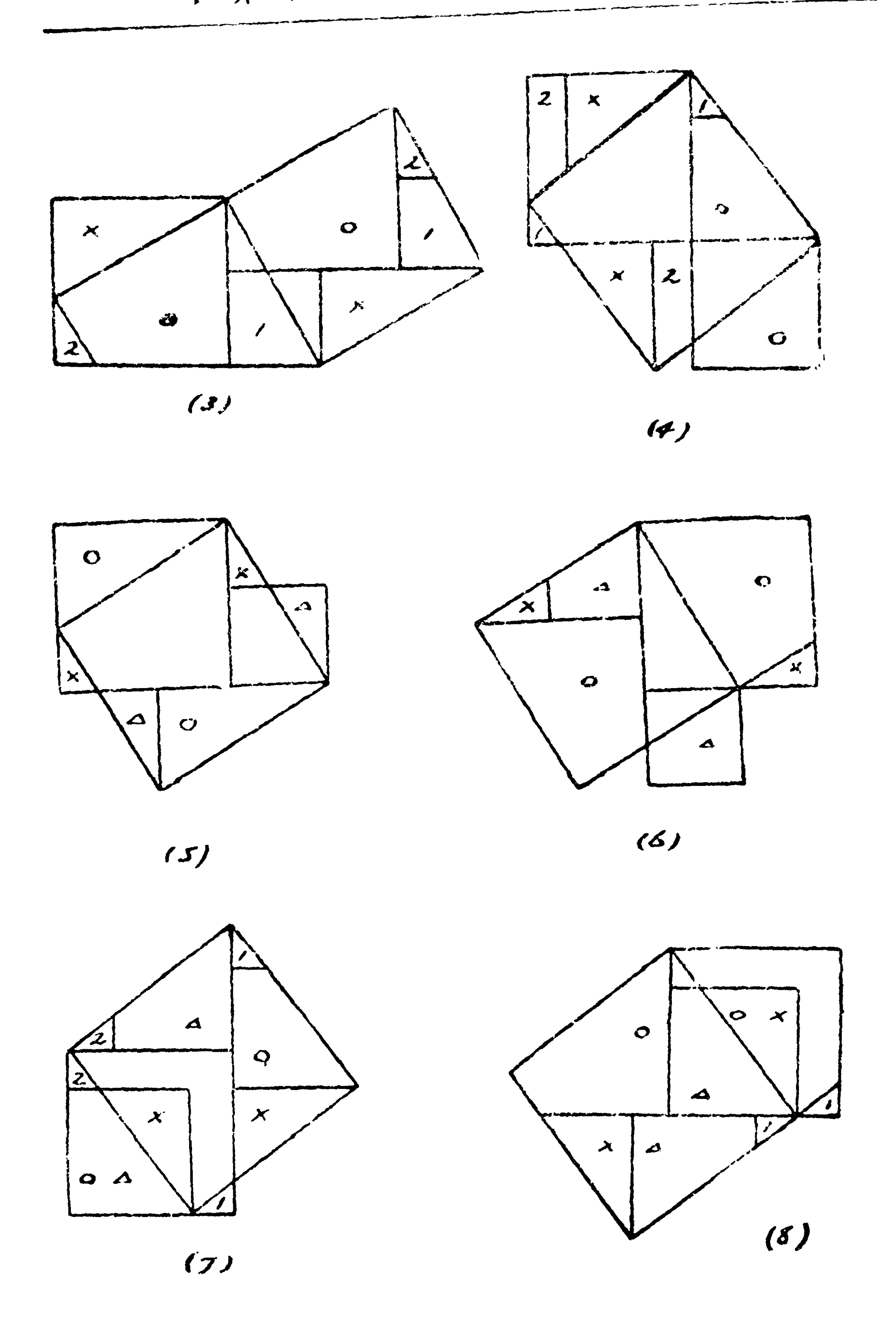
華蘅芳(1830–1902)行素軒算稿內算草叢存四「青朱出入圖說」,設二十二圖如下:



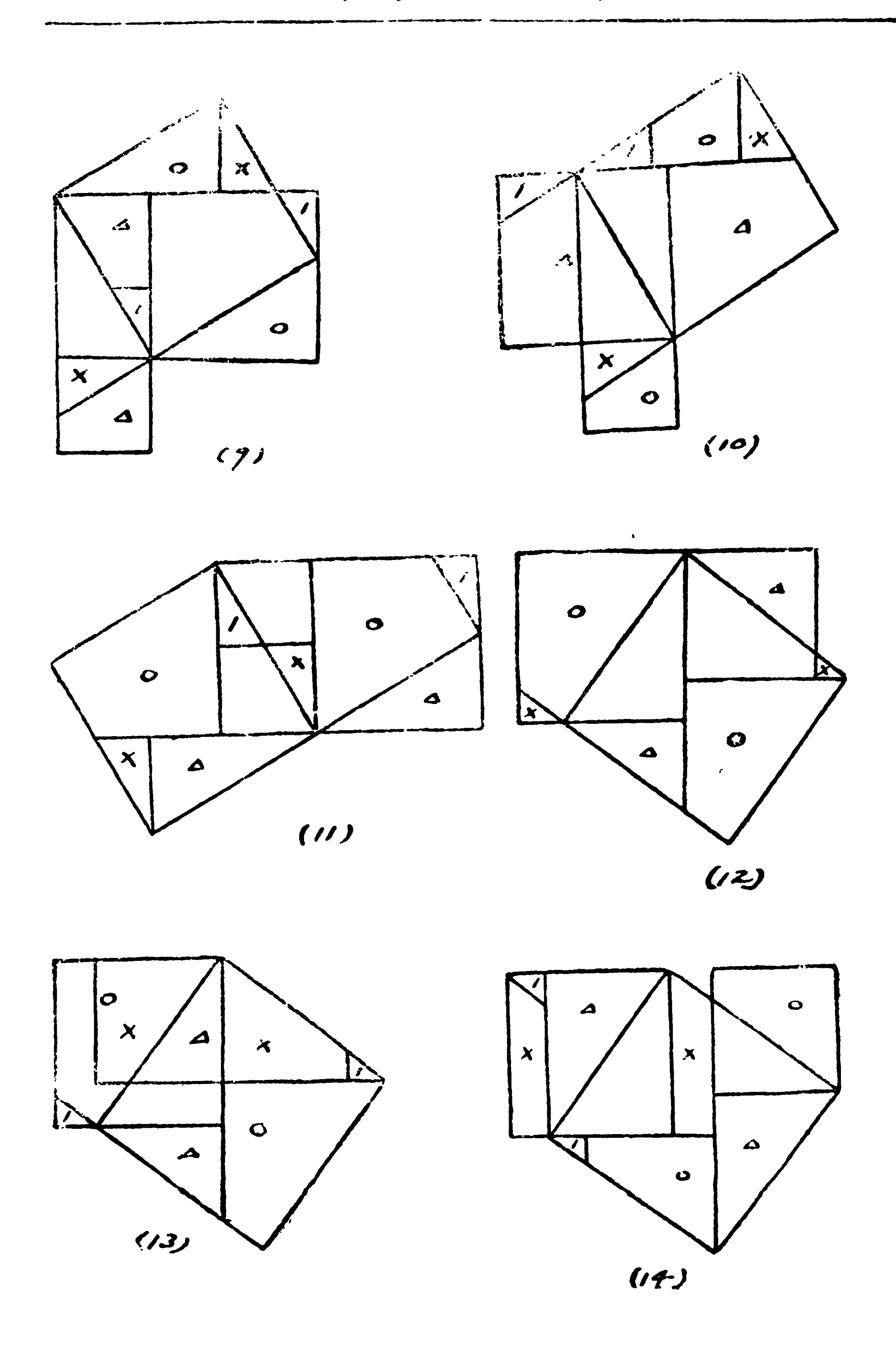
(1)

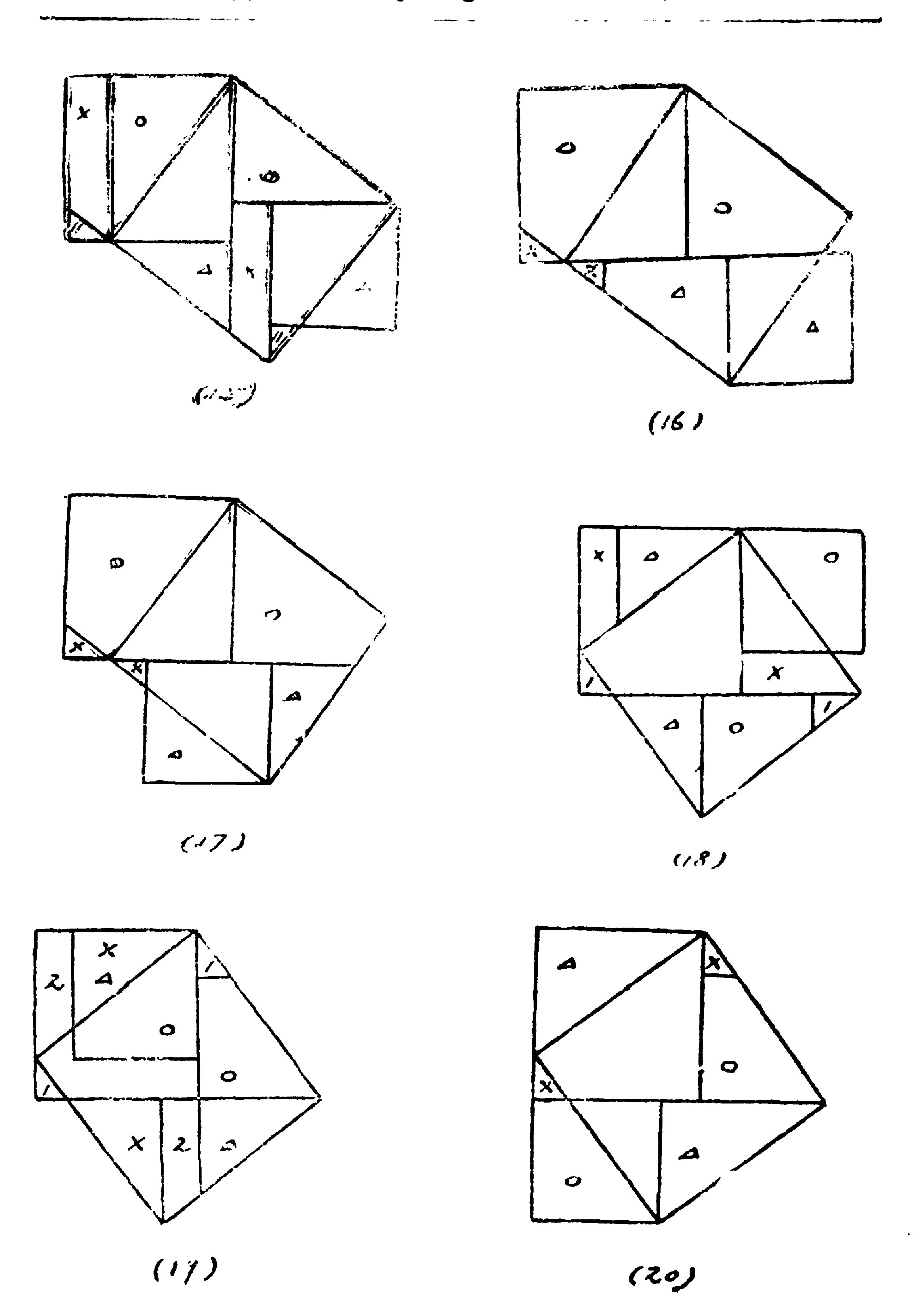


(2)



(3) (4) (5) (6) (7) (8)

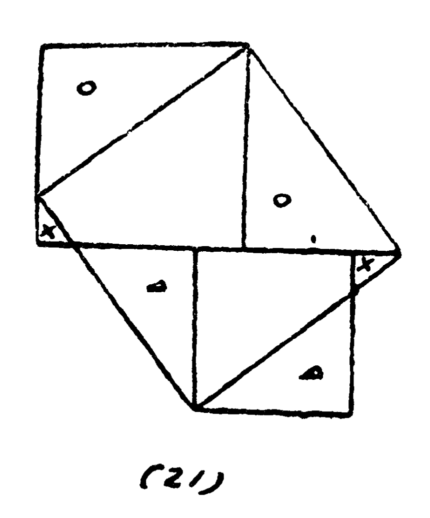

(9)
(10)
(11)
(12)
(13)
(14)



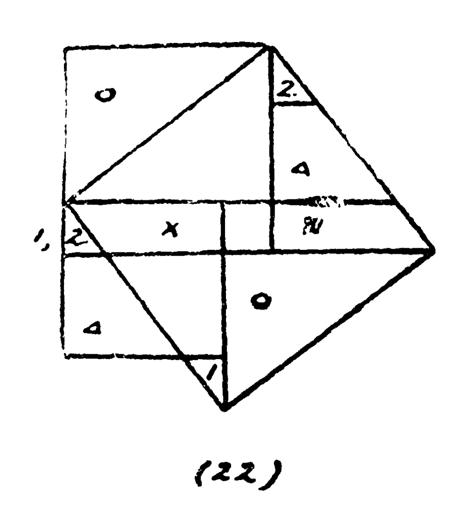
(15) (16)

(17) (18)

(19) (20)



(21)



(22)

就中(5)圖與李銳,李潢所補相同.(20)圖與梅文鼎(1)圖及陳杰所補相同.

9. 明,淸算家之論證下

求句股形內句股弦爲整數,在西洋有次之各法:

奇整數 n 爲一邊,他一邊爲 $\frac{1}{2}(n^2-1)$,則斜邊 $\frac{1}{2}(n^2+1)$.(Pythagoras).

x, y 俱爲奇數或偶數,xy 爲完全平方數,則斜邊爲 $\frac{1}{2}(x+y)$,他二邊爲 $\frac{1}{2}(x-y)$,$\sqrt{xy}$.(Euclid).

偶整數 m 爲一邊,他一邊爲 $\frac{1}{4}(m^2-1)$,則斜邊爲 $\frac{1}{4}(m^2+1)$.(Plato).

m, n 爲任意二整數,以 $2mn$, m^2-n^2 爲二邊,則

斜邊爲 m^2+n^2 (Moseres).

其在國中論此者亦有數家.如:

數理精蘊卷十二:「定句股弦無零數法」,則本於Euclid.

清·陳杰算法大成上編(1844)卷二句股,「定句股弦三數皆整法」稱「舊法係用三率連比例,…羅(士琳)爲任設兩數求一句股形三數皆整法…(陳杰)又創爲任設一數求無數句股形皆盡之法…」,

數理精蘊(a)舊法第一題, $\frac{\text{首率}\ c-b}{\text{中率}\ a}=\frac{\text{中率}\ a}{\text{末率}\ c+b}$,

$$c=\frac{(c-b)+(c+b)}{2},\quad b=\frac{(c+b)-(c-b)}{2},\ a=a.$$

(b) 舊法第二題, $\frac{\text{首率}\ c-a}{\text{中率}\ b}=\frac{\text{中率}\ b}{\text{末率}\ c+a}$,

$$c=\frac{(c-a)+(c+a)}{2},\quad a=\frac{(c+a)-(c-a)}{2},\quad b=b.$$

(何夢瑤法同)

(c) 羅士琳法: 甲數 $=m$, 乙數 $=n$.

$$c=m^2+n^2,\quad a=m^2-n^2,\quad b=\sqrt{(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2}.$$

項名達法: (李銳法同)

$$c=m^2+n^2,\quad a=m^2-n^2,\quad b=2mn.$$

(d) 羅士琳法:

$c=m^2+n^2,\quad b=m^2-n^2,\quad a=\sqrt{(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2}.$

項名達法: (李銳法同).

$c=m^2+n^2,\quad b=m^2-n^2,\quad a=2mn.$ (Moseres).

(e) 陳杰法: 奇數 $=m$, 遞加減數 $=2m$, 令 $m^2=c-b$,

$$a=3m^2-2m,\ \frac{a^2}{c-b}=c+b=\frac{(3m^2-2m)^2}{m^2}=9m^2-12m+4.$$

則 $c=5m^2-6m+2,\ b=4m^2-6m+2,\ a=3m^2-2m.$

(f) 陳杰法: 偶數 $=n$, 遞加減數 $=4n$,

令 $2n^2=c-b,\quad a=3\times 2n^2-\frac{4n}{2}=6n^2-2n,$

$$\frac{a^2}{c-b}=\frac{(6n^2-2n)^2}{2n^2}=18n^2-12n+2,$$

$$c=10n^2-6n+1,\quad b=8n^2-6n+1,\quad a=6n^2-2n.$$

李善蘭則古昔齋算學(1867 刻)第十三,天算或問卷一稱;取二數或俱偶,或俱奇.

(a) $mn=$ 大數, $n=$ 小數,

$$b=mn,\quad c=\frac{n(m^2+1)}{2},\quad a=\frac{n(m^2-1)}{2}.$$

(b) $m=$ 大數, $n=$ 小數,

$$b=mn,\ c=\frac{m^2+n^2}{2},\quad a=\frac{m^2-n^2}{2}.$$

同文館算學課藝(1880 丁韙良序)卷四有「造

句股最簡之法」爲貴榮所作.時李善蘭方教授天文館,法當出於李.

(a) 取 m 一數,奇或偶,

$$a=m,\quad b=\frac{m^2-1}{2},\quad c=\frac{m^2+1}{2}.\qquad \text{(Pythagoras)}$$

(b) 取 $m, m+1$ 二數相連,

$$a=2m+1,\quad b=2m(m+1),\quad c=2(m+1).$$

又 取 $m, m+2$ 二數相間,

$$a=2m+2,\quad b=m(m+2),\quad c=2(m+2).$$

又 取 m, n 任意二數,

$$a=2mn,\quad b=m^2-n^2,\quad c=m^2+n^2.\qquad \text{(Moseres)}$$

(c) 取 m, p, n 三數,而 $m:p=p:n$,

$$c=\frac{m+n}{2},\quad a=\frac{m-n}{2},\quad b=p.\qquad \text{(Euclid)}$$

上述亦載善化劉鐸所編古今算學叢書「句股六術」後,亦不著撰人姓氏。

光緒戊戌(1898)所印古今算學叢書有光緒丙申(1896)沈善蒸造無零句股表捷法一卷,謂取小正三角形句股弦 a_1, b_1, c_1, 三數.

因 $a_1^2+b_1^2=c_1^2$, 則 $a=2(a_1+b_1+c_1)-b_1$,

$b=2(a_1+b_1+c_1)-a_1$,

$$c=2(a_1+b_1+c_1)+a_1;$$

又因$(-a_1)^2+b^2{}_1=c_1{}^2$,則 $a=2(-a_1+b_1+c_1)-b_1$,

$$b=2(-a_1+b_1+c_1)+a_1,$$

$$c=2(-a_1+b_1+c_1)+c_1,$$

又因$a_1{}^2+(-b_1)^2=c_1{}^2$,則 $a=2(a_1-b_1+c_1)+b_1$,

$$b=2(a_1-b_1+c_1)-a_1,$$

$$c=2(a_1-b_1+c_1)+c_1.$$

「故凡一形可生三形,由一而三,三而九,九而二十七,以至無量,莫不可遞求而得,誠簡法也」,如 $a_1:b_1:c_1=3:4:5$,如上公式可得 $a:b:c=20:21:29$, 或 $8:15:17$, 或 $5:12:13$ 三句股形,逐次如是.又如 $a_1:b_1:c_1=3:4:5$ 之句股較 $b_1-a_1=1$, 則三數俱正時得 $a:b:c=20:21:29$, 亦有句股較$b-a=1$.再以三數俱正得 $A:B:C=119:120:169$, 亦有句股較 $B-A=1$. 逐次如是,以至無量.

陳修齡公式演算(1905)卷一,謂從算學題鏡,而略為變通,得

$$a=2\sqrt{xy},\quad b=x-y,\quad c=x+y.$$

黄宗憲憫笑不計(1906 自序),「三角垛堆整數句股術」,

(a) $c-b=1$, $b=2m(m+1)$, $c=2m^2+2m+1$,

$a=2m+1.$

(b) $c-b=2,\quad b=m^2+2m,\quad c=m^2+2m+2,$

$a=2(m+1).$

(c) $c-b=8,\quad b=m^2+4m,\quad c=m^2+4m+8,$

$a=4(m+1).$

(d) $c-b=9,\quad b=2m^2+6m,\quad c=2m^2+6m+9,$

$a=3(2m+3).$

此外 $c-b=3$, $c-b=5$, $c-b=7$ 用(a)式之倍數,又 $c-b=4$, $c-b=6$, $c-b=10$ 用(b)式之倍數.

黃宗憲又變通舊法得二術,如

(e) $m>n,\quad n(2m+n)=x,\quad (m+n)(m-n)=y,$

$m^2+n^2+mn=z.$

則 $c=z^2+x^2,\qquad c=z^2+y^2,$

$a=z^2-x^2,\qquad a=z^2-y^2,$

$b=2xz;\qquad b=2yz.$

(f) $m>n,\quad m=x,\quad n=y,\quad m+n=z.$

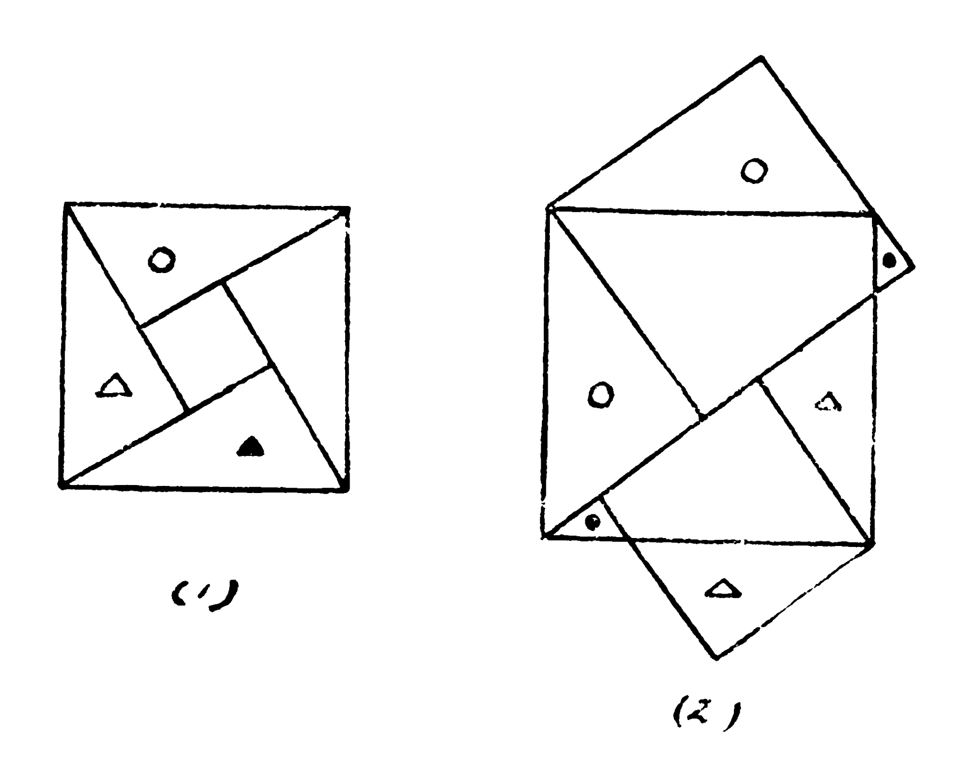
則 $c=(m+n)^2+m^2,\qquad c=(m+n)^2+n^2,$

$a=(m+n)^2-m^2,\qquad a=(m+n)^2-n^2,$

$b=2m(m+n);\qquad b=2n(m+n).$

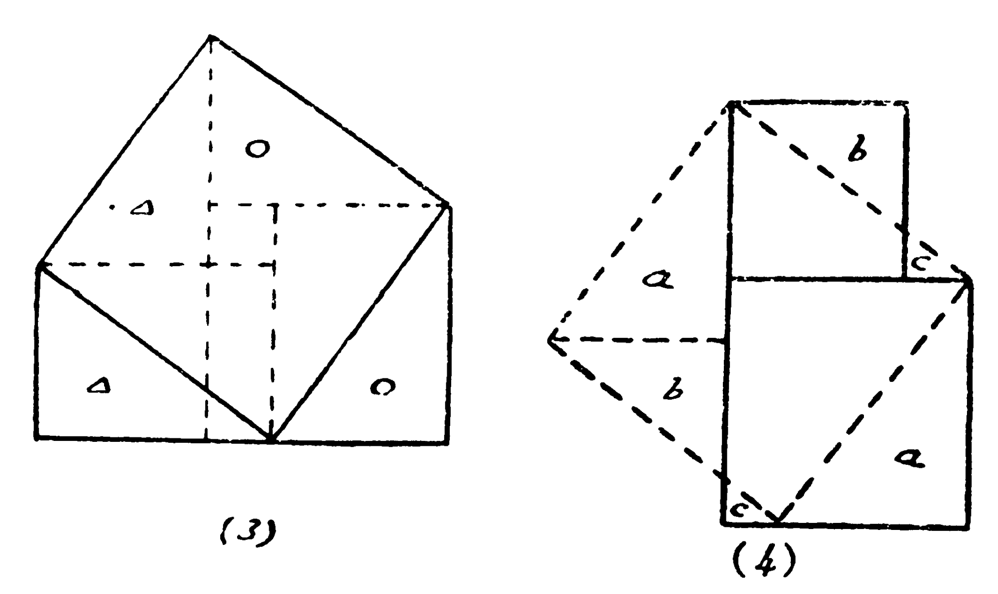
10. 餘論.

日本算學源於我國.日人所證 Pythagoras 定理,頗有與中算家論證相同者.如礒村吉德增補算法闕疑鈔(貞享元年,1684 自序)三之卷,書眉上有以下二圖.



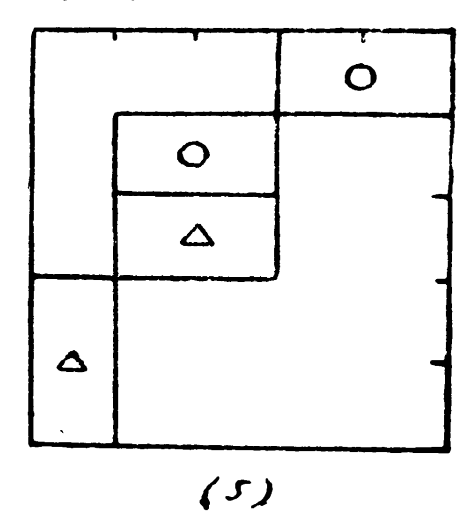
(1) (2)

關孝和(1637 或 1642—1708)關流三部鈔,第一部爲「見題免許」,遠藤利貞疑其出於寬文延寶(1661—1680)間,惜乏明證.今其傳鈔本圖註,頗多異同.林鶴一君於一寫本中發見(3)圖,而遠藤利貞所引則爲(4)圖.其(3)圖與梅文鼎(1)圖,及項名達所補者相似,(4)圖與李銳,李潢所補,完全相同.



(3)　(4)

川邊信一周髀算經註解(1785)亦有句三股四弦五之圖解如(5)圖。



(5)

重差術源流及其新註

目次

1. 重差術之始興.

重差術始興,遠在戰國以前,蓋周髀算經至遲爲戰國前之著作.而周髀算經言:「偃矩以望高,覆矩以測深,臥矩以知遠」.又曰:「望遠,起高之術,而子不能得,則子之於數,未能通類」.後周·甄鸞註曰:「定高遠者立兩表,望懸邈者施累矩」.宋·李籍周髀算經音義於周髀註稱:「周髀算經者以九數句

股重差算日月行度,遠近之數皆得於股表,卽推步蓋天之法也」.於蓋天註稱:「蓋天之說,卽周髀是也.……各依算術,用句股重差」.觀此則重差出於周髀之說,前人已具言之.蓋古代一切測望之術,皆有藉於用矩立表,而周髀算經又爲言用矩立表之第一部書,故謂重差術原於周髀,亦非過言.

其次之言測望者,有九章算術.漢·鄭玄釋周禮地官保氏九數云:「九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,句股」.此言漢時有重差,夕桀,句股各術也.張衡(78-139)所謂「重用句股」(註)是漢法也.劉徽九章注序亦謂:「徽尋九數有重差之名」,則重差之名在魏前已具,可以無疑.九章末章本爲旁要,兩漢屢經刪補,而以句股代旁要.句股亦漢法也.其句股章有測高深望遠七術,已知應用簡單相似三角形爲比例.重差本非離句股別能爲術,故劉徽曰:「輒造重差,綴於句股之下」.

(註) 梁·劉昭注補續漢志十,天文志上引張衡靈憲曰「……將覆其數,用重鉤股……」,一本作「用重差鉤股」.按靈憲文開元占經亦引之,作「將覆其數,用重鉤股」.

2. 重差術之完成.

重差術至魏·劉徽始告完成.晉書稱:魏·陳留王景元四年(263)注九章算術.隋書經籍志有劉徽九章重差圖一卷,新舊唐書并記九章重差一卷劉向(?)撰,九章重差圖一卷劉徽撰.徽於九章算術序稱

「……周官大司徒職,夏至日中立八尺之表,其景尺有五寸,謂之地中.說云:南戴日下萬五千里,夫云爾者,以術推之.按九章立四表望遠,及因木望山之術,皆端旁互見,無有超邈若斯之類.則蒼等爲術,猶未足以博盡羣數也.徽尋九數有重差之名,原其指趣,乃所以施於此也.凡望極高,測絕深,而兼知其遠者,必用重差句股,則必以重差爲率,故曰重差也.立兩表於洛陽之城,令高八尺,南北各盡平地,同日度其正中之時,以景差爲法,表高乘表間爲實,實如法而一,所得加表高,即日去地也.以南表之景,乘表間爲實,實如法而一,即爲從南表至南戴日下也.以南戴日下,及日去地,爲句股,爲之求弦,即日去人也.以徑寸之筩,南望日,日滿筩空,則定筩之長短,以爲股率.以筩徑爲句率.日去人之數爲大股,大股之句,即日徑也.雖天圓穹之象,猶日可度,又況泰山之高,與江海之廣哉.徽以爲今之史籍,且略舉天地之物,考論厥數,載之於志,以闡世術之美.輒造重差,并爲注解,

以究古人之意,綴於句股之下。度高者重表,測深者累矩,孤離者三望,離而又旁求者四望。觸類而長之,則雖幽遐詭伏,靡所不入,博物君子詳而覽焉。」

唐·王孝通上輯古算經表稱「徽思極毫芒,觸類增長,乃造重差之法,列於終篇.雖即未爲司南,然亦一時獨步」信不誣也

3. 海島算經新註.

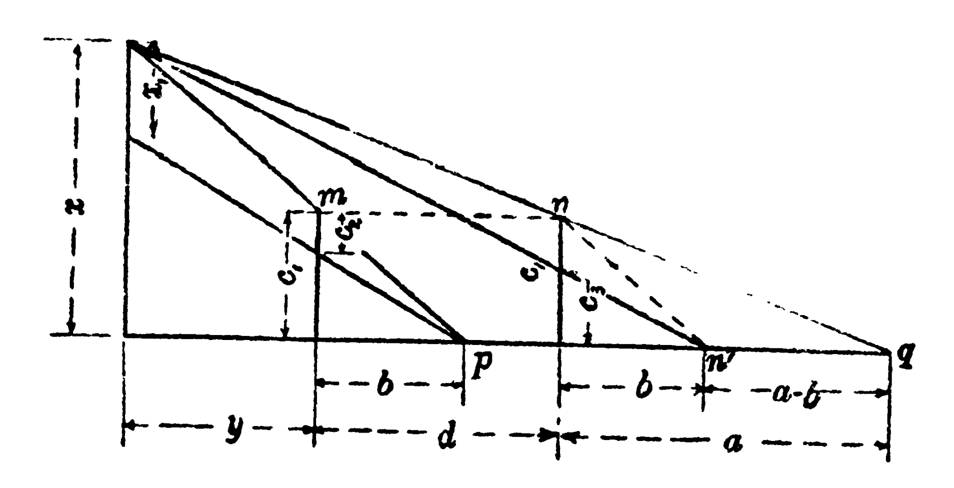
隋唐志之重差圖,宋史藝文志已不復著錄,則其亡已久.清·李潢曾作海島算經細草圖說補入八圖.尙不免有牽強之處,潢亦自言「圖中以四邊形五邊形立說,似與句股不類」茲別作新註於次:

(第一題 「今有望海島,立二表齊高三丈,前後相去千步.令後表與前表參相直.從前表卻行一百二十三步,人目着地,取望島峯,與表末參合,從後表卻行一百二十七步,人目着地,取望島峯亦與表末參合.問島高及去表各幾何

答曰:島高四里五十五步.去表一百二里一百五十步」.

術曰:以表高(c_1)乘表間(d)爲實,相多($a-b$)爲法,除之,所得,加表高(c_1),卽得島高(x).求前表去島遠

近(y)者，以前表卻行(b)乘表間爲實，相多爲法，除之，得島去表里數(y)



如圖作nn'平行於mp;因相似三角形比例得:

$$x=\frac{c_1d}{a-b}+c_1,\ 及\ y=\frac{bd}{a-b}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

（第二題）「今有望松生山上，不知高下。立兩表齊高二丈，前後相去五十步。令後表與前表參相直，從前表卻行七步四尺，薄地遙望松末，與表端參合。又望松本入表二尺八寸。復從後表卻行八步五尺，薄地遙望松末，亦與表端參合。問松高及山去表各幾何。

答曰：松高十二丈二尺八寸。山去表一里二十八步七分步之四。」

術曰：以入表(c_2)乘表間(d)爲實，相多$(a-b)$爲法，除之，加入表(c_2)，卽得松高(x_1)。求表去山遠近(y)者，

置表間(d)以前表卻行(b)乘之爲實,相多($a-b$)爲法,除之,得山去表(y).

如前圖,從(1)式,因$\frac{x_1}{c_2}=\frac{y+b}{b}$及$\frac{x_1-c_2}{c_2}=\frac{d}{a-b}$;得

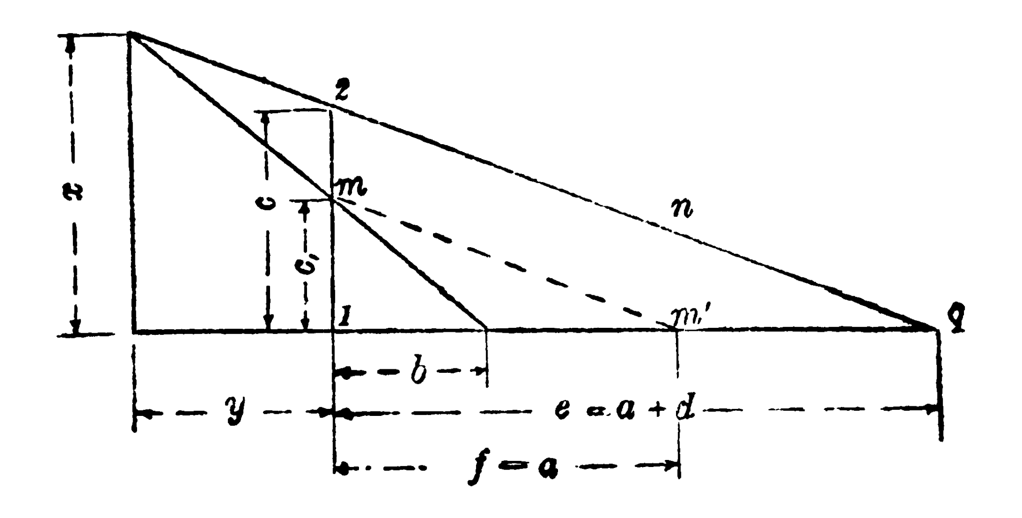
$$x_1=\frac{c_2 d}{a-b}+c_2 \text{ 及 } y=\frac{bd}{a-b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(第三題)「今有南望方邑,不知大小.立兩表東西去六丈,齊人目以索連之,令東表與邑東南隅及東北隅,參相直,當東表之北卻行五步,遙望邑西北隅,入索東端二丈二尺六寸半.又卻北行去表十三步二尺,遙望邑西北隅,適與西表相參合.問邑方及邑去表各幾何.

答曰:邑方三里四十三步四分步之三.邑去表四里四十五步.」

術曰:以入索(c_1)乘後去表($e=a+d$),以兩表相去(c)除之,所得爲景差(f).以前去表(b)減之,不盡,以爲法.置後去表(e)以前去表(b)減之,餘以乘入索(c_1)爲實.實如法而一,得邑方(x). 求去表遠近(y)者,置後去表(b)以景差(f)減之,餘以乘前去表(b)爲實.實如法而一,得邑去表(y).

如圖1,2爲兩表.作mm'平行於nq,則$f=a$爲景差.從



(1)式得:

$$x=\frac{c_1(e-b)}{f-b},\ 及\ y=\frac{b(e-f)}{f-b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(第四題) 「今有望深谷,偃矩岸上,令句高六尺,從句端望谷底,入下股九尺一寸.又設重矩於上,其矩間相去三丈.更從句端望谷底,入上股八尺五寸.問谷深幾何.

答曰:(深)四十一丈九尺.」

術曰:置矩間(d)以上股(c_3)乘之爲實.上下股(c_3,c_1)相減餘爲法除之.所得以句高(b)減之卽得谷深(y).

於第一題圖,令谷底爲x,則 $\frac{y+b}{b}=\frac{x}{c_1}$ $\frac{y+b+d}{b}=\frac{x}{c_3}$.

卽得

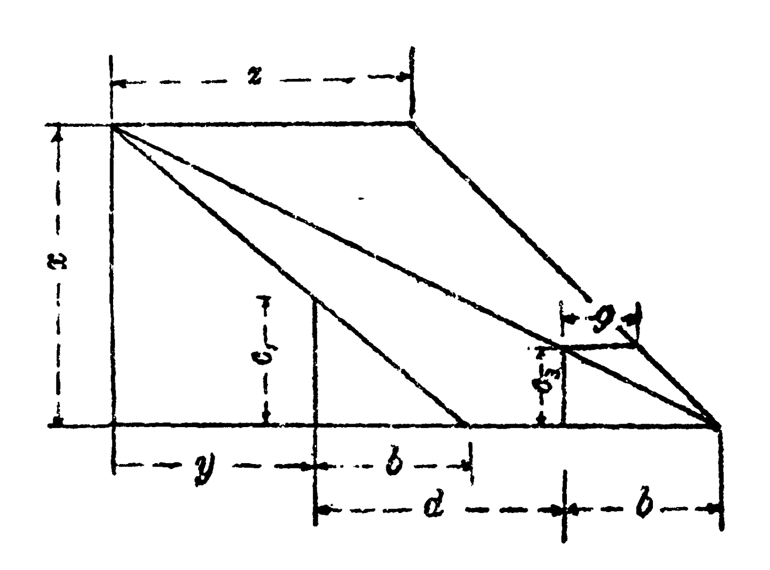
$$y=\frac{c_3d}{c_1-c_3}-b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(第五題) 「今有登山望樓,樓在平地,偃矩山

上,令句高六尺,從句端斜望樓足,入下股一丈二尺.又設重矩於上,令其間相去三丈.更從句端斜望樓足,入上股一丈一尺四寸.又立小表於入股之會,復從句端斜望樓岑端,入小表八寸,問樓高幾何.

答曰:高八丈.」

術曰:上下股(c_3,c_1)相減,餘爲法,置矩間(d)以下股(c_1)乘之,如句高(b)而一.所得以入小表(g)乘之爲實.實如法而一,即是樓高(z).



如圖從(4)式及 $\dfrac{x}{c_1}=\dfrac{y+b}{b}$ 之關係,得 $\dfrac{x}{c_1}=\dfrac{c_3 d}{c_1-c_3}\cdot\dfrac{1}{b}$.

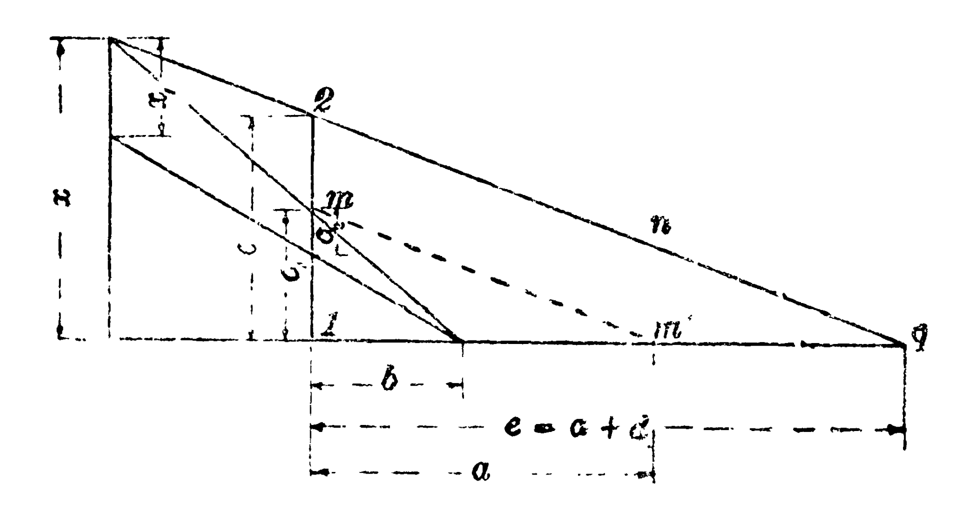
又因 $\dfrac{x}{c_3}=\dfrac{z}{g}$。即得 $z=\dfrac{g\cdot\dfrac{c_1 d}{b}}{c_1-c_3}$ ……………………… (5)

(第六題) 「今有東南望波口,立兩表,南北相

去九丈.以索薄地連之,當北表之西卻行去表六丈,薄地遙望波口,南岸入索北端四丈二寸.以望北岸,入前所望表裏一丈二尺.又卻後行去表十三丈五尺,薄地遙望波口南岸,與南表參合.問波口廣幾何.

答曰:一里二百步.」

術曰:以後去表(e)乘入索(c_1),以表相去(c)而一.所得以前去表(b)減之,餘以爲法.復以前去表(b)減後去表(e)餘以乘入所望表裏(c_2)爲實.實如法而一.得波口廣(x_1).



如圖1爲北表,2爲南表.從(2)式及$\frac{a}{e}=\frac{c_1}{c}$之關係,得

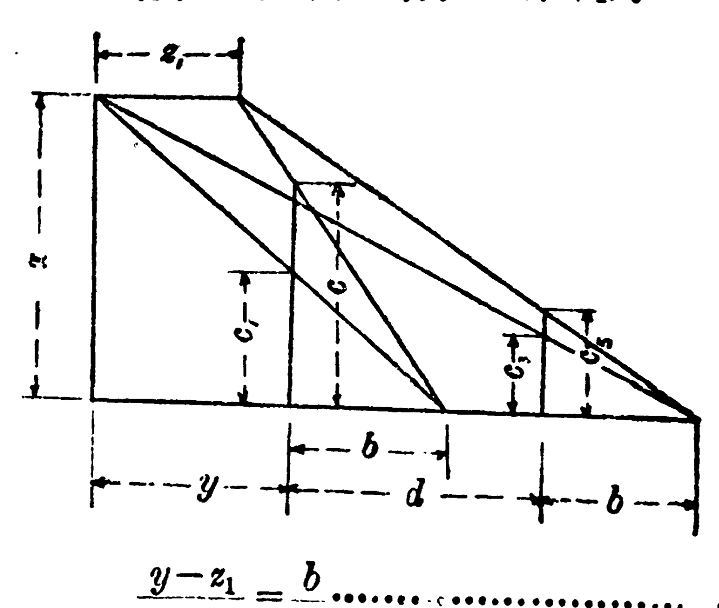
$$x_1=\frac{c_2(e-b)}{\frac{c_1e}{c}-b} \cdots\cdots (6)$$

(第七題)「今有望清淵,淵下有白石,偃矩岸

上,令句高三尺,斜望水岸,入下股四尺五寸,望白石入下股二尺四寸.又設重矩於上,其間相去四尺.更從句端斜望水岸入上股四尺,以望白石入上股二尺二寸,問水深幾何.

答曰:(深)一丈二尺.」

術曰:置望水上下股(c_1c_5)相減餘以乘望石上股(c_3)爲上率.又以望石上下股(c_1,c_3)相減餘以乘望水上股(c_5)爲下率.兩率相減餘以乘矩間(d)爲實.以二差相乘爲法.實如法而一,得水深(z_1).



如圖,因
$$\frac{y-z_1}{x-c}=\frac{b}{c}\qquad\cdots\cdots(A)$$

$$\frac{y+d-z_1}{x-c_5}=\frac{b}{c_5}\qquad\cdots\cdots(B)$$

從(1),(2)消去y,得
$$x=\frac{dcc_5}{b(c-c_5)}\qquad\cdots\cdots(C)$$

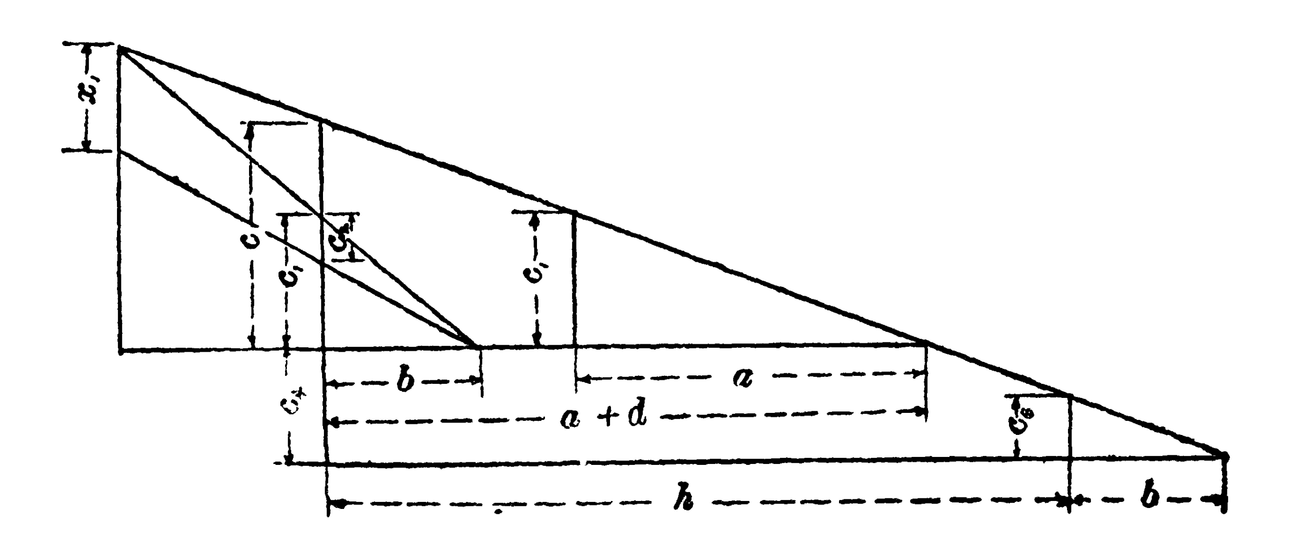
從(A)以(C)之x及(4)式之y代入,得

$$z_1=\frac{d[c_3(c-c_5)-c_5(c_1-c_3)]}{(c_1-c_3)(c-c_5)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(第八題) 「今有登山望津,津在山南,偃矩山上,令句高一丈二尺,從句端斜望津南岸入下股二丈三尺一寸.又望津北岸入前望股裏一丈八寸.更登高巖,北卻行二十二步,上登五十一步,偃矩山上,更從句端斜望津南岸入上股二丈二尺,問津廣幾何.

答曰:(廣)二里一百二步.」

術曰:以句高(b)乘下股(c_4)如上股(c_6)而一,所得以句高(b)減之,餘爲法.置北行(c_4)以句高(b)乘之,如上股(c_6)而一,所得以減上登(h),餘以乘入股裏(c_2)爲實.實如法而一,卽得津廣.



如圖 $\dfrac{b}{c_6}=\dfrac{b+h}{c+c_4}=\dfrac{a+d}{c}=\dfrac{a}{c_1}$.

從 $\dfrac{b}{c_6}=\dfrac{b+h}{c+c_4}=\dfrac{a+d}{c}$ 得 $a+d-b=h-\dfrac{bc_4}{c_8}$ ..... (A)

從 $\dfrac{b}{c_6}=\dfrac{a}{c_1}$ 得 $a=\dfrac{bc_1}{c_6}$ .... (B)

又從(2)式 $x_1=\dfrac{c_2d}{a-b}+c_2$, 以$(A)$,$(B)$式代入,得

$$x_1=\frac{c_2\left(h-\dfrac{bc_4}{c_6}\right)}{\dfrac{bc_1}{c_6}-b} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

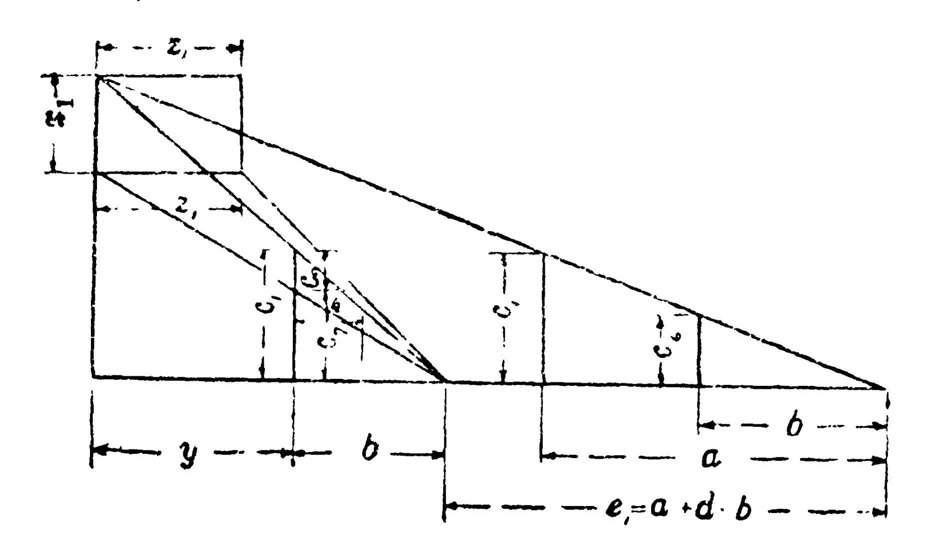
(第九題)「今有登山臨邑,邑在山南,偃矩山上,令句高三尺五寸,令句端與邑東南隅及東北隅參相直,從句端遙望東北隅,入下股一丈二尺又施橫句於入股之會,從立句端望西北隅,入橫句五尺,望東南隅入下股一丈八尺,又設重矩於上,令矩間相去四丈,更從立句端望東南隅,入上股一丈七尺五寸.問邑廣長各幾何.

答曰:南北長一里一百步.

東西廣一里三十三步少半步.」

術曰:以句高(b)乘東南隅入下股(c_1)如上股(c_6)

而一,所得減句高(b),餘爲法.以東北隅下股(c_7)減東南隅下股(c_1)餘以乘矩間(e_1)爲實.實如法而一,得邑南北長也.求邑廣(z_1)以入横句(k)乘矩間(e_1)爲實.實如法而一,即得邑東西廣(z_1)。



如圖從(2)式,得 $$x_1=\frac{e_1(c_1-c_7)}{\frac{bc_1}{c_6}-b} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

又如圖從 $\frac{z_1}{k}=\frac{y+b}{b}=\frac{x_1}{c_2}$ 得 $z_1=\frac{x_1k}{c_2}$ 代入上式,得

$$z_1=\frac{e_1k}{\frac{bc_1}{c_6}-b} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

4. 重差術之紹述

劉徽以後,算經中之言測望者,張丘建算經卷上有「今有木不知遠近」及「今有城不知大小」

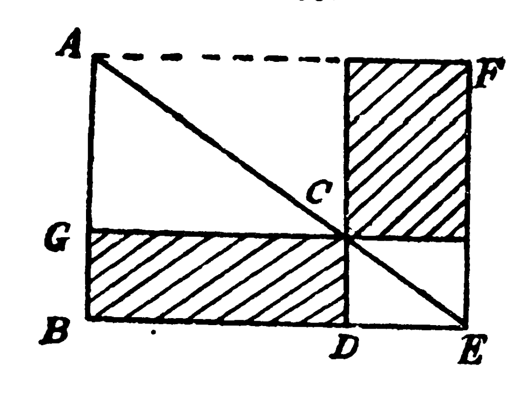
二題.亦應用相似三角形爲計算.梁·祖暅之造圭表,測景驗氣,求日高地中,於重差之術用力甚深.暅之曾以諸法授後魏·信都芳(武定中,543－550卒).都芳因亦注重差句股.至唐,而重差忽被海島之名,唐代選舉:九章,海島共限一歲.李淳風亦注海島算經一卷.宋史有「海島算經一卷,夏翰[一作翺]新重演議海島算經一卷」.其後宋·紹聖二年(1095)吏部令史韓公廉通九章算術及鈎股重差之義,作九章鈎股測驗渾天書一卷.宋·楊輝算法通變本末卷上,稱:「海島題法,隱奧莫得其祕,李淳風雖注祇云下法,亦不曾說其源.(劉益)議古根源元無細草,但依術演算,亦不知其旨」云.

5. 重差術之應用

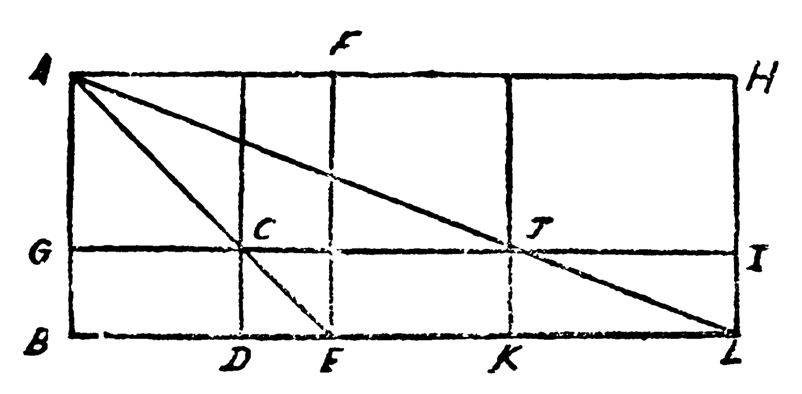
宋元算士頗言重差術之應用,宋·秦九韶數書九章(1247)卷七,測望類「望山高遠」題,術曰「以句股求之,重差入之……」與劉徽海島算經第一題相似.又「陡岸測水」題,術曰「以句股重差求之……」則應用相似三角形底邊之廣與高成比例,劉徽亦常用之,又卷八「表望方城」題,術曰「以句股重差求之……」又「望敵遠近」及「表望浮圖」題,術曰

「以句股求之,重差入之……」幷應用相似三角形.計秦氏數書九章應用重差術凡五題.

宋·楊輝乘除通變算寶(1274)卷上稱「劉徽以旁要之術,變重差,減積,爲海島九問」,續古摘奇算法(1275)卷下有海島題解,引海島算經第一題及九章以表望山術,次又以隔水望木二題爲問,驗重差之術,引用海島第一題.楊輝自謂「嘗置海島小圖



於座右,乃見先賢作法之萬一」.其法於 ABE 直角三角形,知 $AB=$ 句,$BE=$ 股,$AE=$ 弦;$CD=$ 餘句,$DE=$ 餘股.而 AE 弦之內外,分二句-股;其一,句中容橫,如 CF 長方形,其一,股中容直,如 BC 長方形,二積之數皆同,即 $\square BC=\square CF$,故 $AG=\dfrac{BD\times CD}{DE}$.楊輝又曰「凡句中容橫,股中容直,二



積皆同,古人以題易名,若非釋名,則無以知其源」.於海島第一題,因 $\square BC=\square CF$, 而 $DE=$ 小餘股;又因 $\square BJ=\square JH$, 而 $KL=$ 大餘股. 故 $\square BJ-\square BC=\square JH-\square CF$, 卽 $\square DJ=\square JH-\square CF$, 卽 $CD\times DK=(KL-DE)\times AG$, $\therefore c_1\times d=(a-b)\times AG$, 卽 $AG=\dfrac{c_1\times d}{a-b}$, 而 $x=\dfrac{c_1\times d}{a-b}+c_1$ 矣. 明·利瑪竇,徐光啓譯幾何原本,其第一卷,第四十三題稱「凡方形對角線旁兩餘方形 (Complements of a Parallelogram) 自相等」,暉所取者,蓋此義也.

元·朱世傑四元玉鑑(1303)卷中有句股測望八問,其後五問卽海島算經之第一問至第四及其第七問. 而第四問之求表去城 (y), 第六問之求表去城(y)均如重差術.其餘則以立天元一如積求之,亦得相同之結果.

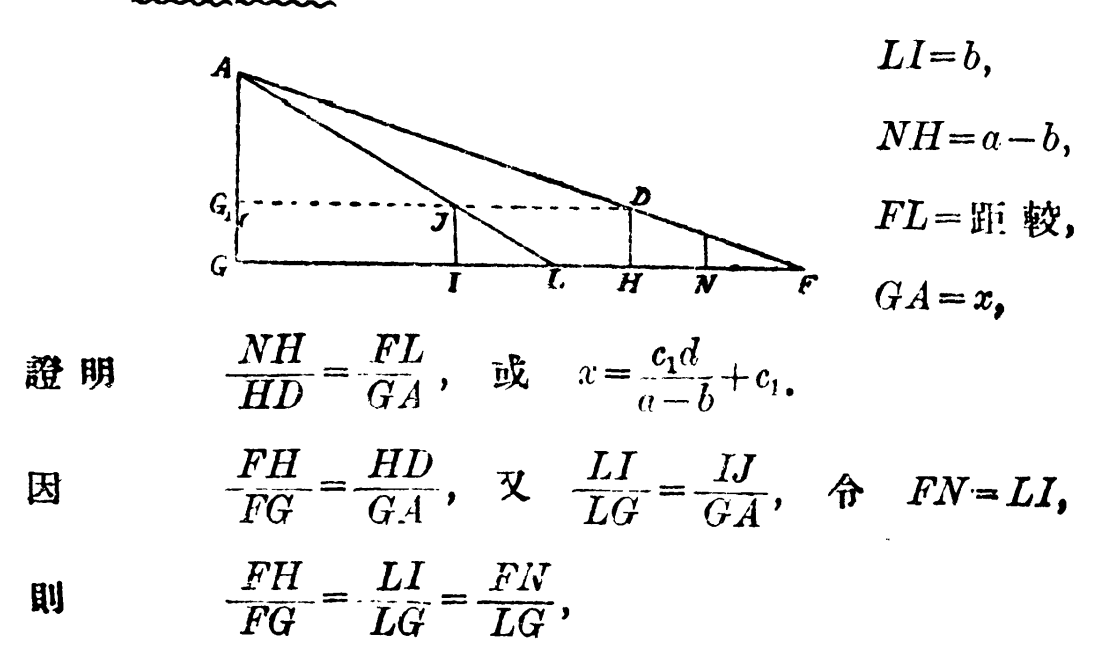
元·舒天民六藝綱目卷下引劉徽九章算術序文「立兩表於洛陽之城……」以下,稱爲魏·劉徽句股重差術.

6. 重差術之衰廢.

明代舊算事業,頗爲衰廢.永樂大典雖曾收錄海島算經而流傳不廣.唐順之 (1507—1560) 荊川文集卷十二「句股測望論」所言亦不詳備.顧應祥

(1483–1565)句股算術(1533)，及周述學曆宗算會(1558)卷三所引海島題問幷脫去第五，第七，二題。而海島第三題，解爲 $x=\frac{b(c-c_1)}{f-b}+c,\ y=\frac{b(e-f)}{f-b}$ 則頗明顯。程大位算法統宗(1593)卷八之「海島題解」僅因襲宋·楊輝續古摘奇算法解法，別附歌訣二首而已。至重差術第二題以下圖解，尙無顧應祥，周述學之詳。明季西算輸入中國，利，徐之測量法義第十題「以表測高」，徐光啓之測量異同第四題「以重表兼測無遠之高，無高之遠」，第六題「以重矩兼測無廣之深，無深之廣」，則實用幾何原本以解重差術也。

測量法義欲於下圖之 $IJ=HJ=c_1, FH=a, IH=d,$



$LI=b,$

$NH=a-b,$

$FL=$距較,

$GA=x,$

證明 $\frac{NH}{HD}=\frac{FL}{GA}$, 或 $x=\frac{c_1d}{a-b}+c_1.$

因 $\frac{FH}{FG}=\frac{HD}{GA}$, 又 $\frac{LI}{LG}=\frac{IJ}{GA}$, 令 $FN=LI,$

則 $\frac{FH}{FG}=\frac{LI}{LG}=\frac{FN}{LG},$

$$\frac{FH}{FG}=\frac{NH}{FL}$$（幾何原本,第五卷,第十九題）

因　$\frac{FH}{FG}=\frac{HD}{GA}$，故　$\frac{NH}{HD}=\frac{FL}{GA}$，

即　$\frac{a-b}{c_1}=\frac{a+d-b}{x}$，　$x=\frac{c_1 d}{a-b}+c_1$ 也.

測量異同第四題,則證舊用表間 IH,今用距較 FL,其實理論相同,而 $\frac{HD}{HN}=\frac{G_1A}{IH}$ 爲舊式,$\frac{HD}{HN}=\frac{GA}{FL}$ 爲新式,就中 $\frac{G_1A}{(G_1J)}=\frac{GA}{(GL)}$，又 $\frac{(G_1J)}{IH}=\frac{(GL)}{FL}$,兩式相乘得 $\frac{G_1A}{IH}=\frac{GA}{GL}$，$\therefore$ $x=\frac{c_1 d}{a-b}+c_1$ 也. 至求 y 之遠,則因 $\triangle AG_1D$, DHF 爲相似三角形,則 HF,G_1D 爲相似邊,又因 $\triangle AG_1J$, JIL 爲相似三角形,則 IL,G_1J 爲相似邊.$\therefore$ $HF : G_1D :: IL : G_1J$.

即　$\frac{HF}{IL}=\frac{G_1D}{G_1J}$，或　$\frac{HF-IL}{IL}=\frac{G_1D-G_1J}{G_1J}$，

$\frac{a-b}{b}=\frac{d}{y}$，　$\therefore$　$y=\frac{bd}{a-b}$.

而明季由西洋輸入者,又有「矩度」或「象限儀」(Quadran) 測量之說.詳熊三拔之表度說及徐光啓之測量法義卷中,頗爲一時所宗.入清而方中通之

數度衍(1661)卷七「器測」篇,黃百家之句股矩測解原(1679?)梅文鼎之三角法舉要(1684?)卷五「測量」篇,陳訏之句股述(1683)卷二「矩度說」等篇,年希堯之測算刀圭(1718)「三角測高」等篇,陳訏之句股引蒙(1722)「西法矩度測量」篇,莊亨陽之莊氏算學「矩度測量」篇,屠文漪之九章錄要卷十一之三「矩測高」等篇,幷著其說.而重差術第一題,亦有解說,如:方中通之數度衍(1661)卷七「測量」篇,李子金之算法通義(1676)卷一「立表測高之法」篇,杜知耕之數學鑰(1681)卷六「日晷測高」等篇,陳訏之句股述(1683)卷二「立表測高」等篇,毛宗旦之九章蠡測「測望法」篇,楊作枚之句股闡微卷一「句股重測高遠」篇,梅文鼎之句股闡微卷四「測量用影差義疏」篇,陳訏之句股引蒙(1722)「立表測高」等篇,莊亨陽之莊氏算學「句股測量」篇,屠文漪之九章錄要卷十一之三,「表測高」等篇,所論多不出楊輝,程大位之範圍.

7. 重差術之再興.

海島算經散見明永樂大典中,清乾隆間開四庫館,戴震(1724—1777)裒而輯之,仍爲一卷,篇帙無

多,而古法具在,戴震與九章同爲表章.其見於四庫全書者,有提要一首,題乾隆四十年(1775)四月校上.見於孔繼涵(1739—1783)所刻算經十書者,末有乾隆乙未(1775)夏四月休寧戴震跋語一篇,文與提要相同.自此重差術全篇乃見傳於世.顧十書雖再刻於常熟屈氏,而補註考證,尙未遑也.鍾祥李潢(?—1811)乃爲之註,并應用同式形兩兩相比,加補圖說.其自序稱「圖中以四邊形五邊形立說,似與句股不類……」書甫寫定,潢卽一病不起,似其證註尙有遺憾也.沈欽裴校正李潢九章算術細草九卷,補演海島算經一卷.駱騰鳳校刋李潢海島算經細草圖說,亦無多改正.其後嘉慶甲戌(1814)紀大奎(1746—1825)筆算便覽卷四「句股重差各訣」則以筆算演海島題問.光緒五年(1879)李鏐於戴輯海島算經九題之外,從六藝綱目所引補入第十題,又以天元一術校衍,都爲一卷,題「海島緯筆」爲衍元海鑑第三種.光緒十八年(1892)江蘇書局校刊顧觀光(1799—1862)遺著九數存古,其卷九引劉徽九章序及其重差術,并錄李潢所補圖說焉.光緒壬寅(1902)張松溪句股題鏡卷二,以形學代數演海島題問.

茲復不揣拙陋,設為新註,令各題作圖形勢相當,俾可疊相襲用,幷避去四邊形,五邊形之說,其第一題則從李潢之舊,設爲平行線,求其相似三角形各邊之比例焉。

大衍求一術之過去與未來

目次

1. 孫子算經關於大衍求一術之問題

孫子算經卷下載「今有物不知其數」(註)一題,爲後世大衍求一術之起原.今錄其題術如下:

「今有物不知其數,三三數之賸二,五五數之賸三,七七數之賸二,問物幾何.

答曰二十三.

術曰,三三數之賸二,置一百四十;五五數之賸三,置六十三;七七數之賸二,置三十;幷之,得二百三十三,以二百一十減之卽得.

凡三三數之賸一,則置七十;五五數之賸一,則置二十一;七七數之賸一,則置十五一百六以上,以一百五減之,卽得」.

(註)本篇凡引用原文者用「……」記號,引用小註者用〔……〕記號.

2. 大衍求一術問題之新記法

上之題問,爲便利起見,可書爲

$$\left|\frac{N}{3}=2,\quad \left|\frac{N}{5}=3,\quad \left|\frac{N}{7}=2.\right.\right.\right.\quad 或\quad \frac{N}{(3,5,7)}(=2,3,2).$$

應用此記法者,爲徐震池.見其所著「商餘求原法」,載在科學第十卷第二期(十四年五月).未有此新記法之前,則借用同餘式(Congruence)之符號表之.如上題可記爲 $N\equiv2\ (\text{mod. }3)\equiv3\ (\text{mod. }5)\equiv2\ (\text{mod. }7)$ 是也.

3. 宋·周密之鬼谷算

宋·周密,志雅堂雜鈔,卷下,「陰陽算術」條,載:「鬼谷算,一名隔牆算.其法先將錢不拘多少,三數數之,凡遇剩一則下七十,二則下百四十;次五數數之,剩一則下二十一,二則下四十二;次七數數之,剩一則下十五,二則下三十.總計其數,然後退一百五,或多則退二百十.之外餘者,卽是見在錢數也.有一詩隱括云:

三歲孩兒七十稀　五留廿一事尤奇

七度上元重相會　寒食清明便可知

「案此法,取相乘之數也.如三則以五七相乘數倍

之,五則以三七相乘之數,七則以三五相乘之數,合之得百零五]」.

4. 宋·楊輝之翦管術

宋·楊輝續古摘奇算法(1275)載:

「物不知總數,只云三三數之剩二,五五數之剩三,七七數之剩二,問本總數幾何.[孫子]

答曰二十三.

解題.[俗名秦王暗點兵,猶覆射之術,或過一百五數,須於題內云知].

(翦管)術曰,三數剩一下七十.[題內剩二,下百四十].五數剩一,下二十一.[題內剩三,下六十三].七數剩一,下十五.[題內剩二,下三十].三位併之,[得二百三十三].滿一百五數去之.減兩個一百五,餘二十三爲答數.今續四問:

(a)用工不知其數,差人支犒,每三人支肉一斤,剩五兩八銖[是三數剩二].每五人支錢一貫,剩零四百[是五數剩三].每七人支酒一摋,恰攞成摋[是七數無剩].問總工所支各幾何.

(答曰) 九十八人. 錢一十九貫六百文.

酒十四摋. 肉三十二斤一十兩十

六銖.

草曰三剩二[下百四十]五剩三[下六十三]七無剩不下.併之,[得二百三]. 減一百五,餘九十八工.以二百乘工數爲錢數,七除工數爲酒,三除爲肉.

(b) 七數剩一,八數剩二,九數剩三,問本總數幾何.

(答曰) 四百九十八.

術曰,七餘一,下二百八十八. [題內餘一,下二百八十八].八餘一,下四百四十一. [題內餘二,下八百八十二]. 九餘一,下二百八十.[題內餘三,下八百四十].併之,[二千一十]滿五百四,去之.[去三個五百四]餘[四百九十八]合問.

(c) 十一數餘三,十二數餘二,十三數餘一,問元總數幾何.

(答曰) 一十四.

術曰,十一餘一,下九百三十六. [題內餘三,下二千八百八]. 十二餘一,下一千五百七十三. [題內餘二,下三千一百四十六].十三餘一,下九百二十四.[題內餘一,下九百二十四].併之,[六千八百七十八]. 滿總法一千七百一十六,

去之.[去四個一千七百一十六]餘[十四]合問.

(d)二數餘一,五數餘二,七數餘三,九數餘四,問元總數幾何.

(答曰) 一百五十七.

術曰,二數餘一,下三百十五.[題內餘一,下三百一十五].五數餘一,下一百二十六.[題內餘二,下二百五十二].七數餘一,下五百四十.[題內餘三,下一千六百二十].九數餘一,下二百八十.[題內餘四,下一千一百二十].併之,[三千三百零七].滿總法六百三十,去之.[去五個六百三十]餘[一百五十七]爲答數合問.

5. 明·嚴恭之管數

明初嚴恭通原算法(1372)載:

「今有散錢不知其數,作七十七陌穿之,欠五十湊穿,若作七十八陌穿之,不多不少.問錢數若干.[此係管數卻非不足適足].

答曰二千一百六文.

術曰,列七十八自乘,得六千八十四,又以七十七減欠五十餘二十七,乘頭位得一十六萬四千二百六十八.別以七十八,七十七相乘得六

千六,減除頭位,實不滿法,卻合前問.[若以七十八數有零,當五千九百二十九乘].(註)」

6. 明·周述學之總分

明周述學神道大編,歷宗算會(1558)卷十「總分」條稱:「若非盈不足,而惟各餘率者,或以三,五,七;或以七,八,九參伍之餘,而布例下之數,如滿會數去之,餘爲得所求之總也.若以二,三,四參伍之,而無餘率者,須有一總以求之(下略).」

7. 明·程大位之孫子歌.

明·程大位算法統宗(1593)卷五載:

「物不知總　孫子歌曰[又云韓信點兵也]

三人同行七十稀,　五樹梅花廿一枝.

七子團圓正半月,　除百令五便得知.

今有物不知數,只云三數剩二個,五數剩三個,

(註)　蓋 $\left|\frac{N}{(A=77)}=77-50=27=a,\right.\qquad\left|\frac{N}{(B=78)}=0=b.\right.$

$\left|\frac{Y_1}{A}=\frac{78}{77}\right.$,而 $\left|\frac{78(=\alpha)\times 78}{77}=1\right.$, $\left|\frac{Y_2}{B}=\right|\frac{77}{78}$,

而 $\left|\frac{77(=\beta)\times 77}{78}=1\right.$, $\theta=77\times 78=6006$.

$a\alpha Y_1=27\times 78\times 78=164264,\quad b\beta Y_2=0\times 77\times 77=0.$

$N=\Sigma a\alpha Y_1-R\theta=164264-27\times 6006=2106.$

此註可於閱至第9節後再參觀之.

七數剩二個,問共若干.答曰共二十三個。

法曰,列3,5,7維乘,以3乘5得15,又以7乘之,得105爲滿錢數,列法.另以3乘5得15,爲7數剩一之衰.又以3乘7得21,爲5數剩一之衰.又以5乘7得35,倍作70爲3數剩一之衰.其3數剩2者,剩1下70,剩2下140;5數剩3者,剩1下21;剩2下42,剩3下63;7數剩2者,剩1下15,剩2下30.併之得232,內減去滿數105,又減105餘23個合問.」

程氏歌訣,流傳最廣,近則婦孺盡曉,(參觀第12節),遠亦流布東瀛,(參觀第17節).市閭算籍,多樂以歌訣演其題問,如譚文數學尋源(1750)卷四之「太平蓮燈」題,蓋其一例也.梅㲄成(1681—1763)增删算法統宗(1760)因亦未將孫子歌删去,蓋有由也.

8. 宋·秦九韶以外各家學說之源流

觀上所記,知此題術,除秦氏大衍術外,初無統一之專名.宋·楊輝稱翦管術,明·嚴恭稱管數,而孫子有賸一,楊輝有剩一,餘一,總法,周述學有餘率,會數,程大位有剩一之衰,滿數各名詞.蓋大衍術爲秦九韶所發明,不必卽本諸龍受益,王守忠之求一算術.

且宋·沈括(1030—1094)夢淡筆談卷十八云「算術多門,如求一,上驅,搭因,重因之類,皆不離乘除.」楊輝乘除通變算寶(1274)有「求一」代乘除之說.元·賈亨算法全能集卷上歌曰,「求一明教置兩停,二三折半四三因,五之以上二因見,去一除令要定身」.又稱「此法未免重複下算,終不若今人用此歸除法爲捷徑.論之,二法名雖不同,究所用以分之,其實則一.既有歸除,本不用此求一,然古有是法又不容不載,以廣算者之知耳」.沈,楊,賈所稱求一,爲算乘除捷法之一,或龍受益,王守忠亦是論述此種算法.今龍,王書已逸,無可依據,暫置不論.此外宋史卷二百七藝文志第一百六十尙有張祚注法算三平化零歌一卷,龍受益求一算術化零歌一卷,「求一」與「化零」雖有連帶關係,實際亦不得其詳.至於南宋何承天(370—447)調日法用強弱二率以求日法,朔餘.清·李銳(1768—1817)爲作「日法朔餘強弱考」大致或尙相近也.

9. 宋·秦九韶大衍求一術

秦九韶數書九章(1247)共十八卷.第一卷及第二卷屬大衍類,而其

「大衍總數術曰,置諸問數,一曰元數[謂尾位見單零者…]二曰收數[謂尾位見分釐者…],三曰通數[謂諸數各有分子母者,…],四曰復數[謂尾位見十或百及千以上者,…]

秦氏先將有理數,分爲整數(即元數),小數(即收數),分數(即通數),10^n倍整數(即復數)數種.秦氏又曰:

「元數者,先以兩兩連環求等,約奇弗約偶[或約得五,而彼有十,乃約偶而弗約奇],或元數俱偶,約畢,可存一位見偶,或皆約而猶有類數存,姑置之,俟與其他約徧,而後乃與姑置者求等約之,或諸數皆不可盡類,則以諸元數命曰復數,以復數格入之」.

兩兩連環求等,即求最小公倍數(L. C. M.),其言約奇弗約偶,蓋欲約後無等,如6, 4,則應作3, 4.又如25, 10,則應作25, 2.不可作6, 2,或5, 10.如連環求等皆得1,則不約,若:

(9)「餘米推數」題之19,17,12約後亦得19,17,12.其可約者,若:

(1)「蓍卦發微」題之1, 2, 3, 4,約之

1, 2, 3, 4,

約數(2) 3, 2,

得 1, 2, 3, 2.

或 1, 1, 3, 4. 爲定數

(4)「推庫額錢」題之12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 約之

12, 11, 10, 9, 8, 7, | 6,

約數(6) 12, 11, 10, 9, | 8, 7,

約數(2) 1, 11, 5, 9,

得 1, 11, 5, 9, 8, 7, 6.

因9, 8, 6中9與6約6得2; 8又與2約2得1.

故得 1, 11, 5, 9, 8, 7, 1.

(5)「分糶推原」題之83, 110, 135,約之

83, 110, | 135,

約數(5) 27,

得83, 110, 27爲定數.

(8)「積尺尋源」題之130,120,110, 100, 60, 50, 25, 20,約之

130,120,110, 100, 60, 50, 25, | 20,

約數(5) 26, 24, 22, 20, 12, 10, | 5,

約數(5)　　26, 24, 22, 4, 12, | 2,

約數(2)　　13, 12, 11, 2, | 6,

約數(6)　　13, 2, 11, | 2,

約數(2)　　13, 1, 11,

得　13,1,11,2,6(=3×2),2,5,20(=5×4)

或　13,8,11,1,3,1,25,4.

即　13,8,11,1,3,1,25,1 爲定數.

秦氏又曰:

「收數者,乃命尾位分釐作單零,以進所問之數,定位訖,用元數格入之.或如意立數爲母,收進分,釐,以從所向,用過數格入之」.

「通數者,置問數通分內子互乘之,皆曰通數,求總等,不約一位,約衆位,得各元位數,用元數格入之,或諸母數繁,就分從省通之者,皆不用元,各母仍求總等,存一位,約衆位,亦各得元位數,亦用元數格入之」.

如其數爲分數,則先通分納子,而後約之,如;

(2)「古歷會積」題之 $60, 29\frac{499}{940}$, $365\frac{1}{4}$ 先通分納子

得　225600, 111036, 1373340 約之

225600, | 111036, 1373340,

約數 12×235　　　487×19, | 487,

約數 487　　　1,

得 225600, 487×19, 1.

或 225600, 19, 487 爲定數.

秦氏又曰:

「復數者,問數尾位見十以上者.以諸數求總等,存一位,約衆位,始得元數.兩兩連環求等.約奇弗約偶,復乘偶.或約偶弗約奇,復乘奇.或彼此可約,而猶有類存者,又相減以求續等.以續等約彼,則必復乘此,乃得定數.所有元數,收數,通數三格,皆有復乘求定之理,悉可入之」.

例如

(3)「推計土功」題之 54, 57, 75, 72 有總等 3, 約之

約數(3)　54, 19, 25, 24, 又反約之

得　9, 19, 25, 24,

或　27, 19, 25, 8 爲定數.

(6)「程行計地」題之 300, 240, 180 有總等 60,約之

約數(60)　300, 4, 3,

或　100, 4, 9,

或　　25, 16, 9 爲定數.

(7)「程行相反」題之 300, 250, 200 有總等 50,約之

約數(50)　　6, 250, 4,

或　　3, 250, 8,

或　　8, 125, 16 爲定數.

秦氏又曰:

「求定數,勿使兩位見偶,勿使見一太多.見一多則借用繁……」.

蓋求定數,欲各問數化爲不可約之定數,故不使兩位見偶,見偶可拜之,如

(1)題 2 之爲 4,

(8)題 5 之爲 25,

(3)題 9 之爲 27,

(6)題 4, 3 之爲 16, 9,

(7)題 4 之爲 8 爲 16 是也,但拜後之定數,不能大於問數.

勿使見一太多,亦可拜之,如

(8)題 1 之爲 8,

(2)題 1 之爲 487 是也.但拜後之定數,亦不能大於問數.

并後尚有等數,亦可約之,如

(4)題 9, 8, 6 約之得 9, 8, 1,

(8)題 8, 4 約之得 8, 1 是也.

以上為「求定數」.至「借」之解析,另詳於後」.

秦氏又曰:

「不欲借則任得一,以定相乘為衍母,以各定約衍母,各得衍數」.

如(9)題衍母 $=19\times17\times12=\theta$

衍數 $=\dfrac{\theta}{19}, \dfrac{\theta}{17}, \dfrac{\theta}{12}$, 或 204, 228, 323.

(1)題衍母 $=1\times1\times3\times4$

衍數 $=12, 12, 4, 3.$

(8)題衍母 $=13\times8\times11\times1\times3\times1\times25\times1=85800=\theta$

衍數 $=6600, 10725, 7800, (85800), 28600, (85800),$ $3432, (85800)$ 是也.

蓋 $A, B, C, D, \cdots\cdots$ 各「問數」之最小公倍數即「衍母」為 θ, 而「定數」$A', B', C', D', \cdots\cdots$ 等連乘積亦為 θ. 則

$\left|\dfrac{\theta}{(A', B', C', D', \cdots)}=0\right.$. 其除得之實為「衍數」,即

$\dfrac{\theta}{A'}=(B'C'D'\cdots)=Y_1,\quad \dfrac{\theta}{B'}=(A'C'D'\cdots)=Y_2,\quad \dfrac{\theta}{C'}=$

$(A'B'D'\cdots)=Y_3$.

以上爲「求衍數」.

秦氏又曰:

「諸衍數$(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,\cdots\cdots)$各滿定母$(A',B',C',D',\cdots\cdots)$去之,不滿曰「奇」$(G_1,G_2,G_3,G_4,\cdots\cdots)$,以「奇」與「定」用大衍求一入之,以求乘率$(\alpha)$.[或奇得一,便爲乘率]」.

如上述 $Y_1-t_0'A'=G_1$, $Y_2-t_0''B'=G_2$, $Y_3-t_0'''C'=G_3$.

或 $\left|\frac{Y_1}{A'}\right.=\left|\frac{G_1}{A'}\right.$, $\left|\frac{Y_2}{B'}\right.=\left|\frac{G_2}{B'}\right.$, $\left|\frac{Y_3}{C'}\right.=\left|\frac{G_3}{C'}\right.$.

蓋 $Y_1-t_0'A'$ 或 G_1 以 A' 除之,其餘數相同也.

以上爲「求奇數」幷爲大衍求一術之引論.秦氏稱爲大衍總數術,其中實含若干數之理論.次述「大衍求一術」.

秦氏「大衍求一術云,置「奇」右上,「定」居右下,立「天元一」於左上,先以右下除右上,所得商數與左上一相生,入左下然後以右行上下,以少除多,遞互除之,所得商數,隨即遞互累乘,歸左行上下,須使右上末後奇一而止乃驗左上所得,以爲「乘率」.或「奇」數已見單一者便爲乘率」.

依上術意,演例如下: 卽 $\left|\frac{65}{83}\right.$ 令 $\left|\frac{\alpha.65}{83}\right. = 1$, 求 α, 法列甲奇數65於右上,甲定母83於右下,立天元一於左上,空其左下,如:

天元 $\alpha_0 = 1$	奇數 $G_1 = 65$	(上)(註)
0	定母 $A' = 83$	(下)
(左)	(右) $q_1 = 1$.	

以右上少數(65),除右下多數(83),得1爲商($q_1 = 1$),以商1乘左上1,得1,($\alpha_1 = q_1 \times \alpha_0 = q_1$),歸左下,其右下餘18($r_1 = 18$),如:

$\alpha_0 = 1$	$G_1 = 65$
$\alpha_1 = q_1\,\alpha_0 = 1$	$r_1 = 18$
	$q_1 = 1$

以右下少數定餘(18),除右上多數奇數(65),得3爲商($q_2 = 3$),以商3乘左下歸數1得3,($\alpha_2 = q_2\,\alpha_1 = 3$),加入於左上,得4($q_2\,\alpha_1 + \alpha_0 = 4$)其右上餘11($r_2 = 11$),如:

(註) Le Rév. Père Vanhée 作十字號以界之,較見明顯,茲從其例,參讀18節。

$$
\begin{array}{r|l}
 & q_2=3 \\
\alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0=4 & r_2=11 \\
\hline
\alpha_1=1 & r_1=18
\end{array}
$$

以右上少數奇餘($r_2=11$),除右下多數定餘($r_1=18$),得1爲商($q_3=1$),以商1乘左上4得4($q_3\alpha_2=4$),歸左下得5,($q_3\alpha_2+\alpha_1=5$),其右下餘7($r_3=7$),如:

$$
\begin{array}{r|l}
\alpha_2=4 & r_2=11 \\
\hline
\alpha_3=q_3\alpha_2+\alpha_1=5 & r_3=7 \\
 & q_3=1
\end{array}
$$

以右下少數定餘($r_3=7$)除右上多數奇餘($r_2=11$)得1爲商($q_4=1$),以商1乘左下歸數5得5,($q_4\alpha_3=5$),加入於左上得9,($q_4\alpha_3+\alpha_2=9$),其右上餘4($r_4=4$)如:

$$
\begin{array}{r|l}
 & q_4=1 \\
\alpha_4=q_4\alpha_3+\alpha_2=9 & r_4=4 \\
\hline
\alpha_3=5 & r_3=7
\end{array}
$$

以右上少數奇餘($r_4=4$)除右下多數定餘($r_3=7$)得1爲商($q_5=1$),以商1乘左上歸數9得9,($q_5\alpha_4=9$),加入於左下得14($q_5\alpha_4+\alpha_3=14$),其右下餘3($r_5=3$)如:

$$
\begin{array}{r|l}
\alpha_4=9 & r_4=4 \\
\hline
\alpha_5=q_5\alpha_4+\alpha_3=14 & r_5=3 \\
 & q_5=1
\end{array}
$$

以右下少數定餘$(r_5=3)$除右上多數奇餘$(r_4=4)$得1爲商$(q_6=1)$,以商1乘左下歸數14得14,$(q_6\alpha_5=14)$,加入於左上得23$(q_6\alpha_5+\alpha_4=23)$,其右上餘1$(r_6=1)$如:

$$
\begin{array}{r|l}
 & q_6=1 \\
\alpha_6=q_6\alpha_5+\alpha_4=23 & r_6=1 \\
\hline
\alpha_5=14 & r_5=3
\end{array}
$$

驗至右上奇餘得1$(r_6=1)$,只以左上所得23爲甲乘率$(\alpha=\alpha_6=23)$.以上所得必n爲偶次,秦氏所謂「須使右上末後奇一而止」是也.所求乘率蓋使 $\left|\frac{\alpha G_1}{A'}\right.=1$,如此例 $\left|\frac{23\times 65}{83}\right.=1$, 卽乘率乘奇數以除定母剩餘爲一也.

茲參錢寶琮「求一術源流考」(學藝第三卷第四號十年八月)得次式:

$$
\begin{array}{l|lll}
a_n=q_na_{n-1}+a_{n-2} & r_n & 而\left|\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}\right.=r_n, & q_n=q_n, \\
a_{n-2}=q_{n-2}a_{n-3}+a_{n-4} & r_{n-2} & \left|\frac{r_{n-4}}{r_{n-3}}\right.=r_{n-2}, & q_{n-2}=q_{n-2},
\end{array}
$$

	左	右		
	…………………	…………	…………	…………,
	…………………	…………	…………,	…………,
	$a_6=q_6a_5+a_4$	r_6	$\dfrac{r_4}{r_5}=r_6$,	$q_6=q_6$,
	$a_4=q_4a_3+a_2$	r_4	$\dfrac{r_2}{r_3}=r_4$,	$q_4=q_4$,
	$a_2=q_2a_1+a_0$	r_2	$\dfrac{G}{r_1}=r_2$,	$q_2=q_2$.
天元	$a_0=1$	奇G（上）		
	0	定A（下）		
	$a_1=q_1$	r_1 而	$\dfrac{A}{G}=r_1$,	$q_1=q_1$,
	$a_3=q_3a_2+a_1$	r_3	$\dfrac{r_1}{r_2}=r_3$,	$q_3=q_3$,
	$a_5=q_5a_4+a_3$	r_5	$\dfrac{r_3}{r_4}=r_5$,	$q_5=q_5$,
	…………………	…………	…………,	…………,
	…………………	…………	…………,	…………,
	$a_{n-3}=q_{n-3}a_{n-4}+a_{n-5}$	r_{n-3}	$\dfrac{r_{n-5}}{r_{n-4}}=r_{n-3}$,	$q_{n-3}=q_{n-3}$,
	$a_{n-1}=q_{n-1}a_{n-2}+a_{n-3}$	r_{n-1}	$\dfrac{r_{n-3}}{r_{n-2}}=r_{n-1}$,	$q_{n-1}=q_{n-1}$.
	（左）	（右）		

大衍求一術遞除累乘因得乘率,而奇數可以得一之故,可以代數式證之,下列證法,見(科學第十卷二期).

「更設 $\mu_2=q_2$, $\mu_3=q_3\mu_2+1$, $\mu_4=q_4\mu_3+\mu_2$, ……$\mu_k=q_k\mu_{k-1}+\mu_{k-2}$, ……$\mu_n=q_n\mu_{n-1}+\mu_{n-2}$.

依術得 $r_1=A-q_1G=A-\alpha_1G$.

$r_2=G-q_2r_1=G-q_2(A-\alpha_1G)=(q_2\alpha_1=1)G-q_2A=\alpha_2G-\mu_2A$.

$r_3=r_1-q_3r_2=(A-\alpha_1G)-q_3(\alpha_2G-\mu_2A)=\mu_3A-\alpha_3G$.

$r_4=r_2-q_4r_3=(\alpha_2G-\mu_2A)-{}_4(\mu_3A-\alpha_3G)=\alpha_4G-\mu_4A$.

……………………………………

$r_{n-1}=\mu_{n-1}A-\alpha_{n-1}G$.

$r_n=\alpha_nG-\mu_nA$.

$\therefore\quad \alpha_nG=\mu_nA+r_n$.

即 $\left|\frac{\alpha_nG}{A}\right.=\left|\frac{\mu_nA+r_n}{A}\right.=r_n$.

若 $r_n=1$, 則 $\left|\frac{\alpha G}{A}\right.=1$, $\left|\frac{\alpha Y}{A}\right.=1$」.

秦氏又曰:

「置各乘率,對乘衍數,得「泛用」.併泛,課衍母多一者,爲正明.或泛多衍母倍數,驗元數奇偶同類者,損其半倍,［或三處同類,以三約衍母,於三處損之］各爲正用數.或定母得一,而衍數同衍母者,爲無用數.當驗元數同類而正用至多處借之;以元數兩位求等,以等約衍母爲借數,以借數損有,以益其無,爲正用.或數處無者,如意立數爲母;約衍母,所得以如意子乘之,均借補之.或欲從省勿借,任之爲空可也.然後其餘各乘正用,爲各總併總,滿衍母去之,不滿爲所求率也」.

如術意

	元數	定母	衍數	乘數	泛用
1	A	A'	Y_1	α	αY_1
2	B	B'	Y_2	β	βY_2
3	C	C'	Y_3	γ	γY_3
4	C	C'	Y_3	γ	γY_3

則 $\left| \dfrac{\Sigma \alpha Y_1}{(A'B'C'\cdots)} = 1 \right.$　或 $\left| \dfrac{\Sigma \alpha Y_1}{\theta} = 1. \right.$

設(a)$\Sigma\alpha Y_1=m\theta'+1$, 而$\theta=m\theta'$, $m=1$.

則$\Sigma\alpha Y_1=\alpha Y_1+\beta Y_2+\gamma Y_3+\cdots\cdots$中各數即爲正用.

(b)$\Sigma\alpha Y_1=m\theta'+1$, 而$\theta=m\theta'$, $m>1$.

則在$A,B,C,\cdots\cdots$元數,及$A',B',C'\cdots\cdots$定母中,如元數中任兩數,或兩數以上,含有同類數(即公因數 common factor) m. 則A', B', C',$\cdots\cdots$之連乘積θ或$m\theta'$,亦必含m,而此公因數m在A, B, C, $\cdots\cdots$元數中便於察出.既將m察出,則以$m\theta'=m_1\theta'+m_2\theta'+m_3\theta'+\cdots\cdots$而$m=m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots$其中$m_1\theta'$, $m_2\theta'$, $m_3\theta'$, $\cdots\cdots$分別於$\Sigma\alpha Y_1$內各數之含有公因數m者酌量減去,使

$$\Sigma\alpha Y_1'=m\theta'+1, \text{ 而 } m=1.$$

則$\Sigma\alpha Y_1'$中各數爲正用.此爲第一段解義.

如定母$A',B',C',\cdots\cdots$中之某數爲1,則其衍數Y_k與衍母θ同值,而其數無用數,當於多處借之.其法於元數中求同類數m,以$m_1\theta'$, $m_2\theta'$, $\cdots\cdots$爲借數,以之減正用中之多者,而益其無用數者,乃得正用.故秦氏曰:「求定數,$\cdots\cdots$,勿使見一太多,見一多借用繁」也.或不借,任之爲空亦可.

泛用如不減,得數亦無異,遇問數繁多減之可以省算,蓋以

$$\Big|\frac{\Sigma\alpha Y_1}{\theta}=1,\ 變為\ \Big|\frac{\Sigma\alpha Y_1'+m\theta'}{\theta}=1.$$

因 $\Big|\frac{m\theta'}{\theta}=0$，故 $\Big|\frac{\Sigma\alpha Y_1'}{\theta}=1$，就中 $\Sigma\alpha Y_1'$ 較 $\Sigma\alpha Y_1$ 為省算.

最後再示其應用,例如某數 N 以 $A,B,C,\cdots\cdots$ 各除之,其餘為 $a,b,c,\cdots\cdots$.以其餘乘正用 $\alpha Y_1,\beta Y_2,\gamma Y_3,\cdots\cdots$ 為各總,併總,滿衍母 θ 去之.所餘為得數.

用數為 $\alpha Y_1=\alpha(B'C'\cdots\cdots)$，$\beta Y_2=\beta(A'C'\cdots\cdots)$，$\gamma Y_3=\gamma(A'B'\cdots\cdots)$.

各總為 $a\alpha Y_1=a\alpha(B'C'\cdots\cdots)$，$b\beta Y_2=b\beta(A'C'\cdots\cdots)$，$c\gamma Y_3=c\gamma(A'B'\cdots\cdots)$.

$$R\theta=R(A'B'C'\cdots\cdots).$$

故 $\Big|\frac{b\beta Y_2}{A}=0$，$\Big|\frac{c\gamma Y_3}{A}=0$，$\Big|\frac{R\theta}{A}=0$，$\Big|\frac{a\alpha Y_1}{A}=a$.

或 $\Big|\frac{N}{A}=\Big|\frac{\Sigma a\alpha Y_1-R\theta}{A}=\Big|\frac{a\alpha Y_1}{A}=a$.

同理 $\Big|\frac{N}{(A,B,C,\cdots)}=\Big|\frac{\Sigma(a\alpha Y_1)-R\theta}{(A,B,C,\cdots\cdots)}=(a,b,c,\cdots\cdots)$

10. 大衍求一術之起原及其復興

大衍求一術原於孫子,而秦氏數書九章,卻無隻字提及.宋·淳祐七年(1247)九月其自序稱「今數

術之書,尚三十餘家,天象曆度,謂之綴術,太乙壬甲,謂之三式,皆有內算,言其秘也.九章所載,即周官九數,繫於方圓者曰叀術,皆曰外算,對內而言也.其用相通,不可歧二.獨大衍法不載九章,未有能推之者,歷家演法,頗用之以爲方程者誤也……」.觀此則秦氏蓋以歷家以爲方程,因別立大衍術以解析之也.楊輝雖與秦同時,而題意一本孫子,且號爲翦管術直至其後一紀,嚴恭尚稱爲管數.是在宋代,此術用於算術者爲翦管術,用於歷府者爲大衍術.秦氏著書永樂時納入永樂大典.清·乾隆開四庫館從大典中鈔出.其後李銳(1768–1817)并爲之校.道光間(1821–1850)沈欽裴曾得李潢(–1811)藏明·趙琦美(1563–1624)鈔本於張敦仁(1754–1834)家.沈,張於此書共加校正.道光二十二年(1842)宋景昌因李兆洛(1769–1841)藏沈校本,及毛嶽生(1790–1831)覆校李銳校本,參酌訂補,別爲札記,由郁松年刋入宜稼堂叢書中.

而張敦仁求一算術三卷(1803),駱騰鳳(1770–1841)藝游錄二卷(1843刋),時曰醇求一術指一卷,黃宗憲求一術通解二卷(1874),幷於此術有所發明.

11. 清·張敦仁之訓解.

張敦仁求一算術上卷分「求等」,「約分」,「再約」,「連環求等」,「連環相乘」,「大衍求一」各步.其「大衍求一」中求乘率(α)列式之序為

第一數 $\left|\frac{A}{G}=r_1,\right.$ $\quad q_1=q_1,\quad$ 得 $\alpha_0=1,$

第二數 $\left|\frac{G}{r_1}=r_2,\right.$ $\quad q_2=q_2,\quad \alpha_1=q_1\alpha_0=q_1,$

第三數 $\left|\frac{r_1}{r_2}=r_3,\right.$ $\quad q_3=q_3,\quad \alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0,$

第四數 $\left|\frac{r_2}{r_3}=r_4,\right.$ $\quad q_4=q_4,\quad \alpha_3=q_3\alpha_2+\alpha_1,$

....

第 n 數 $\left|\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=r_n,\right.$ $\quad q_n=q_n,\quad \alpha=\alpha_n=q_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}.$

而 n 為偶數, $r_n=1$ 為止.其列式雖與秦術不同,然頗醒目.其以淺顯之筆寫艱深之術,則誠秦氏之功臣.求正用之法,在張氏廢而不用,直以乘率乘衍數,為用數,各為總,并總,滿衍母去之,餘為物數,即, $N=\Sigma a\alpha Y-R\theta$.

張氏并謂唐麟德術以後,元授時術以前,皆用此術,推求上元積算,卷下舉麟德,大衍,崇天,紀元四術,及授時附演一法為例,其說則詳第16節.

12. 清·焦循李銳之論著

張敦仁之先,焦循(1763−1820)於天元一釋卷下(1800)亦論大衍術 謂「循按大衍之術,即孫子算經三三五五七七之術也.此術九章所無,而見於孫子.今則婦人孺子,或以爲戲,孫子雖詳其術,而秦氏則闡其微而暢發之.其三三置七十,則大衍求一術也」.并依秦氏式將孫子題列爲

$A, B, C,$	元數即定母	3,	5,	7, 衍母 =105.
	立天元一	1,	1,	1,
$Y_1, Y_2, Y_3,$	衍數	35,	21,	15,
$G_1, G_2, G_3,$	奇數	2,	1,	1,
$\alpha, \beta, \gamma,$	乘率	2,	1,	1,
$\alpha Y_1, \beta Y_2, \gamma Y_3$	乘數	70,	21,	15,
$a, b, c,$	分數	2,	3,	2,
$a\alpha Y_1, b\beta Y_2, c\gamma Y_3,$	用數	140,	63,	30.

$N = \Sigma\, a\alpha Y_1 - R\theta = 23.$

秦氏大衍術,立天元一法凡兩見.其一爲求衍數法,焦循以爲與張丘建算經蕩杯題右行置一,一,一杯數之意相同.其一爲大衍求一術,焦循謂立天元一於左上者,與右上餘一爲預存倍數也.是時秦書初

出,故焦循所言,多未暢其旨.

同時李銳亦於求等之誼,多所說述,載於焦循之天元一釋.而所著日法朔餘強弱考(1799)解析何承天調日法,尤屬捌解.術曰「視當時測定朔餘,在強率約餘以下,弱率約餘以上者.列強母於右上,強子於右次,一強於右副,右下空.又列弱母於左上,弱子於左次,左副空,一弱於左下.并左右兩行得中行,以中上退除中次爲約餘,約餘多於測定數,卽棄去右行,以中行爲右行,仍前左行.約餘少於測定數,卽棄去左行,以中行爲左行,仍前右行.依前累求約餘,與當時測定數合中上卽日法,中次卽朔餘,中副卽強數,中下卽弱數也」.

如強率 $=\frac{26}{49}$, 弱率 $=\frac{9}{17}$, 測定數 $=\phi=0.53054221$.

(上)	(次)	(副)	(下)		
49	26	1	0	(右行)	約餘 $=\frac{35}{66}=\frac{26\times1+9\times1}{49\times1+17\times1}$
66	35	1	1	(中行)	$=0.5303303<\phi$.
17	9	0	1	(左行)	

49	26	1	0	(右行)	約餘 $=\frac{61}{115}=\frac{26\times2+9\times1}{49\times2+17\times1}$

115　61　2　1 (中行)　$=0.53043478<\phi$.

66　35　1　1 (左行)

逐次如是

49　26　1　0 (右行)　約餘 $=\frac{165}{311}=\frac{26\times 6+9\times 1}{49\times 6+17\times 1}$

311　165　6　1 (中行)　$=0.53054662>\phi$.

262　139　5　1 (左行)

311　165　6　1 (右行)　約餘 $=\frac{304}{573}=\frac{26\times 11+9\times 2}{49\times 11+17\times 2}$

573　304　11　2 (中行)　$=0.53054101<\phi$.

262　139　5　1 (左行)

311　165　6　1 (右行)　約餘 $=\frac{469}{884}=\frac{26\times 17+9\times 3}{49\times 17+17\times 3}$

884　489　17　3 (中行)　$=0.53054298>\phi$.

573　304　11　1 (左行)

884　469　17　3 (右行)　約餘 $=\frac{773}{1457}=\frac{26\times 28+9\times 5}{49\times 28+17\times 5}$

1457　773　28　5 (中行)　$=0.53054221=\phi$.

573　304　11　2 (左行)

而　日法 $=49\times 28+17\times 5=1457$.　強數 $=28$.

朔餘 $=26\times 28+9\times 5=773$.　弱數 $=5$ 矣.

13. 清·駱騰鳳之新法.

駱騰鳳藝游錄卷一之「大衍求一法」及「大衍奇定相求法」各節并說明大衍求一術也.普通一次無定式曾可約之爲 $bx=ay+s$, 亦可化爲 $ax=my+1$,駱氏於「大衍奇定相求法」中說明此理.

令 $G=G$, $-A=-A$, 列式爲

$$G+O=\quad G\cdots\cdots(x)$$

$$O-A=-A\cdots\cdots(y)$$

則

$$G+O=G$$

以q_1乘(x)式,$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots q_1$ 而 $\frac{A}{G}=q_1+\frac{r_1}{G}$,

得, $q_1G+O=q_1G\cdots\cdots(a)$

次列(y)式變其符號, $O+A=+A\cdots\cdots(b)$

$(b)-(a)$得.$(b)_2$, $-a_1G+A=A-a_1G=r_1$ 而 $a_1=q_1$,

以q_2乘上式,$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots q_2$ $\frac{G}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1}$,

得, $-q_2a_1G+q_2A=q_2r_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)_1.$

$$G+O\quad=G\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)_1.$$

$(b)_1-(a)_1$得,$(b)_3$, $a_2G-\mu_2A=G-q_2r_1=r_2$ 而 $a_2=q_2a_1+1$,

$\mu_2=q_2$

以q_3乘上式，……………………………q_3 $\quad \frac{r_1}{r_2}=q_3+\frac{r_3}{r_2}$。

得， $q_3\alpha_2G-q_3\mu_2A=q_3r_2$……………………$(a)_2$

$-\alpha_1G+A \quad =r_1$ ………………… $(b)_2$

$(b)_2-(a)_2$得，$(b)_4$，$-\alpha_3G+\mu_3A=r_1-q_3r_2=r_3$ 而$\alpha_3=q_3\alpha_2+\alpha_1$，

$\mu_3=q_3\mu_2+1$。

……………………q_4 $\quad \frac{r_2}{r_3}=q_4+\frac{r_4}{r_3}$

$-q_4\alpha_3G+q_4\mu_3A=q_4r_3$………$(a)_3$

$\alpha_2G-\mu_2A \quad =r_2$ ……… $(b)_3$

$(b)_3-(a)_3$得，$(b)_5$，$\alpha_4G-\mu_4A=r_2-q_4r_3=r_4$ 而 $\alpha_4=q_4\alpha_3+\alpha_2$，

$\mu_4=q_4\mu_3+\mu_2$。

……………………………

……………………………

……………………………

最後得，$\alpha_nG-\mu_nA=r_n$。而$\alpha_n=q_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}$，$\mu_n=q_n\mu_{n-1}+\mu_{n-2}$。

$\therefore \quad \alpha_nG=\mu_nA+r_n$ （參觀第9節）。

或 $aG=mA+1$。

故駱氏曰：「凡求一者，其左行末數(α_n)爲乘率(a)卽奇(G)之倍數也。其中行末數($\mu_n=m$)卽定(A)之倍數也。其右行末數卽奇一($r_n=1$)。

「凡奇數少於定數 ($G<A$), 而定倍數必少於奇倍數 ($m<a$), 以除上位必得 1, 或徑以定數除之,亦得 1」.

即 $\left|\frac{aG}{mA}\right. = \left|\frac{aG}{A}\right. = 1.$

駱氏幷推論如 $G<A$,而數有等數,亦可按上法求等,不過依法求至 $r_n=0$ 爲止. 如 $G=1014000$, $A=6172608$. 得 $9892G=1625A+0$, 即 G, A 可約爲 1625 及 9892, 其等數爲 624 也. 駱氏亦省去求正用,直以乘率乘衍數爲用數.

14. 清·時曰醇之歌訣

時曰醇求一術指所擬求一歌括,謂:

「列全數爲泛母,約泛母得定母,定母連乘爲衍母,定母各除得衍數.衍數滿定母去之爲奇數,奇數除定母,定餘除奇數.奇餘,定餘,互餘畢;凡幾除數終奇一.天元除數用連乘,遞加前數爲乘率.乘率乘衍數,所得爲用數.用數乘賸數,所得爲總數.各總幷之爲總數.滿定母去得求數」. 其求等約分,時氏立法稍簡.

15. 清·黃宗憲之通解

黃宗憲求一術通解二卷,前列例言謂:

「一求定母,舊術極繁,至求一術指,稍歸簡捷,而約分之理,仍不易明.今析各泛母爲極小數根,瞭如指掌,遇題有多式者,一索無遺.

「一求乘率,舊術先以奇定相求,得奇一,再立天元累乘累加,亦覺眩目.今以定母衍數對列,輾轉相減,遞求寄數,卽爲乘率,不立天元.

「一舊術有借用數之法,贅設,删之」.

其析數根法以各泛母(卽諸問數 $A,B,C,\cdots$) 自上至下列之,考各位每數爲若干數根(卽素數 2, 3, 5, 7, … 等) 連乘所得,卽析爲若干數根(如 715 析爲 5, 11, 13) 次徧視各同根,取某位最多者用之,凡已用之根旁必作△號爲誌,餘所有棄之不用,兩位等多者隨意用之,以所用數根連乘之,卽得各位定母.如某位可以數根析盡,則定母爲 1, 而其位爲廢位,不立衍數.

其求寄數法,則「列定母於右行,列衍數於左行,[左角上預寄一數],輾轉累減,[凡定母與衍數輾轉累減,則其上所寄數,必輾轉累加],至衍數餘一卽止,視左角上寄數爲乘率」.

又「按兩數相減,必以少數爲法,多數爲實.其法上無寄數者,不論減若干次,減餘上仍以一爲寄數.其實上無寄數者,減餘數上,以所減次數爲寄數,其法上實上俱有寄數者,視累減若干次,以法上寄數亦累加若干次於實上寄數中,卽得減餘數上之寄數矣」.

列題: 通解題云:「今有數不知總.以五累減之無賸,以七百十五累減之賸十,以二百四十七累減之賸一百四十,以三百九十一累減之賸二百四十五,以一百八十七累減之賸一百零九.問總數若干.

答曰一萬零零二十」.

解法: 置各泛母,依法得定母,衍母,衍數,如下表:

	泛母	析母	定母	衍母	衍數
1	$A=5$	$=5$	$A'=1$	$\theta=53117735$	Y_1 廢位
2	$B=715$	$=5\triangle\times11\triangle\times13$	$B'=55$		$Y_2=96577$
3	$C=247$	$=13\triangle\times19\triangle$	$C'=247$		$Y_3=21505$
4	$D=391$	$=17\triangle\times23\triangle$	$D'=391$		$Y_4=13585$
5	$E=187$	$=11\times17$	$E'=1$		Y_5 廢位

既得各定母,衍數,兩兩對列,以求一術入之,如次:

Y_2	B'
96577	55

$$\alpha_0=1\quad \frac{96525}{52=r_0 \qquad 55}$$

$$\alpha_0 \quad \frac{q_1\times r_0 \;=52}{52 \qquad r_1 \;=\;3} \quad \alpha_1=q_1=1$$

$$\begin{array}{l}\alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0 \\ =18\end{array} \quad \frac{51=q_2r_1}{1=r_2}$$

$\therefore \quad \alpha=\underline{18}.$

Y_3	C'
21505	247

$$\beta_0=1\quad \frac{21489}{16=r_0 \qquad 247}$$

$$\beta_0 \quad \frac{q_1\times r_0=240}{16 \qquad r_1= \;\;7} \beta_1=q_1=15$$

$$\begin{array}{l}\beta_2=q_2\beta_1+\beta_0 \\ =31\end{array} \frac{14=q_2r_1}{2=r_2 \qquad 7} \beta_1$$

$$\beta_2 \quad \frac{q_3\times r_2= \qquad 6}{2 \qquad r_3= \qquad 1} \begin{array}{l}\beta_3=q_3\beta_2+\beta_1 \\ =108\end{array}$$

$\beta_4 = q_4\beta_3 + \beta_2 = 139$　　$\dfrac{1 = q_4 r_3}{1 = r_4}$

$\therefore \quad \beta = \underline{\underline{139}}.$

Y_4	D'
13585	391

$\gamma_0 = 1$　$\dfrac{13294}{291 = r_0}$　　391

γ_0　　291　$\dfrac{q_1 \times r_0 = 291}{r_1 = 100}$　$\gamma_1 = q_1 = 1$

$\gamma_2 = q_2\gamma_1 + \gamma_0 = 3$　$\dfrac{200 = q_2 r_1}{91}$　　100　γ_1

γ_2　　91　$\dfrac{q_3 \times r_2 = 91}{r_3 = 9}$　$\gamma_3 = q_3\gamma_2 + \gamma_1 = 4$

$\gamma_4 = q_4\gamma_3 + \gamma_2 = 43$　$\dfrac{90 = q_4 r_3}{1 = r_4}$

$\therefore \quad \gamma = \underline{\underline{43}}.$

秦氏以奇居右上,須使右上末後奇一而止,黃氏以奇居左下,故須使左下末後奇一而止,其理實相一致,卽使 $r_n = 1$,而 n 爲偶數也.其列式則較駱氏尤爲簡明.

黃氏又謂求一者,是求衍數(Y)中之一,所以寄

數$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$祇記衍數之次數.其首層餘$r_0$,是以若干定母減一個衍數之所餘也.(卽$r_0=Y-t_0A$)故餘數上角寄$(\alpha_0)$一數.第二層餘$r_1$,是以$\alpha_1$個衍數減若干定母之所餘也.(卽$r_1=t_1A-\alpha_1Y$)故餘數上角寄$\alpha_1$數.第三層餘$r_2$,是以若干定母減$\alpha_2$個衍數之所餘也.(卽$r_2=\alpha_2Y-t_2A$)故餘數上角寄$\alpha_2$數.同理第四層餘$r_3=t_3A-\alpha_3Y$,第五層餘$r_4=\alpha_4Y-t_4A$.至第$n$層餘1,是以若干定母減$\alpha_n$個衍數之所餘也.$(r_n=\alpha_nY-t_nA)$故餘數上角寄$\alpha_n$.其衍數至此已得1,故以$\alpha=\alpha_n$爲乘率也.

今以代數法記之.

$$r_0=Y-t_0A.$$

$$r_1=A-\alpha_1r_0=A-\alpha_1(Y-t_0A)$$

$$=t_1A-\alpha_1Y. \qquad \text{而 } t_1=t_0+1$$

$$r_2=r_0-q_2r_1=(Y-t_0A)-(q_2t_1A-q_2\alpha_1Y)$$

$$=\alpha_2Y-t_2A. \qquad \text{而 } t_2=q_2t_1+t_0$$

$$r_3=r_1-q_3r_2=(t_1A-\alpha_1Y)-(q_3\alpha_2Y-q_3t_2A)$$

$$=t_3A-\alpha_3Y. \qquad \text{而 } t_3=q_3t_2+t_1$$

$$r_4=r_2-q_4r_3=(\alpha_2Y-t_2A)-(q_4t_3A-q_4\alpha_3Y)$$

$$=\alpha_4Y-t_4A. \qquad \text{而 } t_4=q_4t_3+t_2$$

....

∴ $r_n = a_n Y - t_n A$, 而 $t_n = q_n t_{n-1} + t_{n-2}$,

$a_n = q_n a_{n-1} + a_{n-2}$.

即 $a_n Y = Z_n A + r_n$.

$$\left|\frac{a_n Y}{A}\right. = \left|\frac{t_n A + r_n}{A}\right. = r_n. \quad 或 \quad \left|\frac{aY}{A}\right. = 1.$$

如上例, $Y = 13585$, $A = 391$,

則 $a_0 = 1$, $r_0 = 291$, $t_0 = 34$,

$a_1 = 1$, $r_1 = 100$, $t_1 = 35$,

$a_2 = 3$, $r_2 = 91$, $t_2 = 104$,

$a_3 = 4$, $r_3 = 9$, $t_3 = 139$,

$a_4 = 43$, $r_4 = 1$, $t_4 = 1494$.

既得各乘率後,以衍數乘之,又以騰數乘之,併得所求率,如下表:

衍數	乘數	用數	騰數	各總
$Y_2 = 96577$	$\alpha = 18$	$\alpha Y_2 = 1738386$	$a = 10$	$a\alpha Y_2 = 17383860$
$Y_3 = 21505$	$\beta = 139$	$\beta Y_3 = 2989195$	$b = 140$	$b\beta Y_3 = 418487300$
$Y_4 = 13585$	$\gamma = 43$	$\gamma Y_4 = 584155$	$c = 245$	$c\gamma Y_4 = 143117975$

所求率 $= 578989135$

$-)$ $109 \times 5311735 = 578979115$

得, 所求總 $= 10020$

16. 大衍求一術與曆法之應用

秦氏曾言，大衍法曆家演法頗用之，以爲方程者誤也．張敦仁以爲「推步家謂之方程，周琮明天術義略所謂以方程約而齊之．鮑澣之論統天術所謂虛廢方程之算者是也．然其布算行列迥與方程不同，則名之爲方程者非也．(中略) 求一術之於步天，其用尤爲切要．何者，氣朔交轉之策，卽各數也．氣朔交轉之應，卽不滿各數之殘也．上元以來距所求年之積分，卽未以各數除去之數也．是故由唐麟德術以下迄於宋元諸家演撰，皆依賴是而成，五代曹士蔿始變古法，不復推上古爲元，然世謂之小術，祇行於民間．元郭守敬造授時術，斷取近距，不用積年日法，而李謙議仍有附演積數三法，以釋惑者之疑．蓋臺官師說相傳，罔敢失墜，求一術之見重當時如此．明用大統，一切皆仍授時之舊，鄭世子朱載堉所進萬年術，亦依郭法截算，不立積年．上元之法，久不行世」茲舉秦氏以後各家之所推算，以明求一術在曆法上之應用．

秦九韶數書九章第一卷第二題「古曆會積」題問不合，沈欽裴用四分術，開禧術推之，以正其誤，法

最詳盡，另詳次節．同書第三卷第一，二，三題均言天時，而各有錯誤．茲爲便利起見，先述第三卷第三題「治歷演紀」如下：

「問開禧歷積年 7848183，欲知推演之原調日法，求朔餘，朔率，斗分，歲率，歲閏，入元歲，入閏，朔定骨，閏泛骨，閏縮，紀率，氣元率，元閏，元數及氣等率，因率，蔀率，朔等數，因數，蔀數，朔積年，二十三事各幾何」．

按朔餘，日法爲陰歷每月日數之小數部份．

宋何承天調日法用強弱二率，強率 $=\frac{26}{49}$，弱率 $=\frac{9}{17}$．

因宋鮑澣之開禧術測定朔餘 $\phi=0.5305917159$．

如第 15 節求得

日法 = 16900，　　強數 = 339，

朔餘 = 8967，　　弱數 = 17．

朔率 = 16900(日法) × 29(朔策) + 8967(朔餘) = 499067．

斗泛分 = 16900(日法) × 0.2431 (歲斗分，此係統天曆所測每歲冬至周日下 24 刻 31 分) = 4108.3900．

斗定分 = 斗分 = 4108．

以大衍入之

$$\frac{4108(\text{斗分})}{16900(\text{日法})}=\frac{52(\text{等數})\times 79}{52(\text{等數})\times 325(\text{蔀率})}$$

故 $\frac{144(\text{因率})\times 52\times 79}{52\times 325}=1.$

因率 = 144.

蔀率 = 325.

氣泛骨 = 16900(日法)×11.446154(歲氣骨,嘉泰甲子歲天正冬至氣骨) = 193440.0026.

氣定骨 = 氣骨分 = 193440.

約率 = 60(紀法)×52(等數) = 3120.

$$\frac{193440\ (\text{氣定骨})}{60\ (\text{紀法})\times 52\ (\text{等數})}\times\frac{144\ (\text{因率})}{325\ (\text{蔀率})}=27\frac{153}{325}.$$

入元歲 = 153×60(紀法) = 9180.

因歲日 = 365.

歲率 = 16900(日法)×365(歲日)+4108(斗分) = 6172608.

歲閏 = 6172608(歲率) − 12(歲月)×499067(朔率)

= 183804.

$$\frac{183804\ (\text{歲閏})\times 9180\ (\text{入元歲})}{499067\ (\text{朔率})}=338\frac{474260\ (\text{入閏})}{499067\ (\text{朔率})}.$$

入閏 = 474260.

朔泛骨 = 16900(日法)×1.755562(歲朔骨) = 29668.997800.

朔定骨 = 朔骨分 29669.

閏泛骨 = 193440(氣定骨) − 29669(朔定骨) = 163771.

$$\frac{16900\,(日法)}{200\,(約法)} = 84.5\,(半刻法).$$

閏骨策 = 11.446154 (歲氣骨) −1.755562 (歲朔骨)

= 9 日 69 刻 05 分 92 秒.

閏差或閏嬴 = 474260(入閏)−163771(閏泛骨) = 310489.

閏縮 = 163771(閏泛骨)+499067(朔率)−474260(入閏).

= 188578.

紀率 = 60 (紀法) ×16900 (日法) = 1014000.

氣元率 $\dfrac{1014000\,(紀率)}{52\,(等數)}$ = 19500.

$$\frac{183804\,(歲閏) \times 19500\,(氣元率)}{499067\,(朔率)} = 7181\frac{377873\,(元閏)}{499067\,(朔率)}.$$

元閏 = 377873.

又虛置一億(10⁸)減入元歲,餘爲實,元率除之,得乘限,宋景昌按「此蓋恐積年過於一億,運算繁多,故設乘限,以爲元數之限,假使歷過元數,大於乘限,則日法,朔餘,便須改設,并蔀數亦改求矣.唐宋演撰家相沿如此,未可廢也」.

$$乘元限數 = \frac{100,000,000-9180\,(入元歲)}{19500\,(氣元率)} = 5127+.$$

因 $\dfrac{377873\,(元閏)}{499067\,(朔率)}$

而 $\dfrac{457999\,(\text{因數}) \times 377873\,(\text{元閏}) \times 1\,(\text{朔等數})}{499067\,(\text{蔀數})} = 1.$

卽 朔等數 = 1,

因數 = 457999,

蔀數 = 499067.

$\dfrac{188578\,(\text{閏縮}) \times 457999\,(\text{因數})}{1\,(\text{等數}) \times 499067\,(\text{蔀數})} = 49967\dfrac{402}{599067}.$

朔積年 = 402×19500 (元率) = 7839000.

本歷積年 = 7839000 (朔積年) +9180 (入元歲)

+3 (成歷年) = 7848183.

阮元 (1764−1849) 疇人傳 (1799) 卷二十二秦九韶傳:

「論曰,自元郭守敬授時術截用當時爲元.迄今五百年來,疇官術士,無復有知演紀之法者.獨數學九章猶存其術.嗜古之士,得以考見古人推演積年日法之故,蓋猶告朔之餼羊矣」.

沈欽裴改正秦九韶「古歷會積」題如下:

「問四分術,冬至 $365\frac{1}{4}$ 日,朔策 $29\frac{499}{940}$ 日,甲子 60 日,各爲一周,假令天正朔甲戌日 $\frac{410}{940}$ 日,冬至丁酉日 $\frac{3}{4}$ 日,欲求氣朔甲子一會,積年,積月,積日,及歷過未至年數各幾何.答曰 (1) 一會積年 1512, (2) 積月 18800, (3) 積日 555180, (4) 歷過年 1115, (5) 未至年 405」.

如題 $365\frac{1}{4}$ (冬至), $20\frac{499}{940}$ (朔策), 60 (甲子).

如第8節通分內子, 得共母3760. 及

A. 487 (甲定母), 19 (乙定母), 225600 (丙定母).

θ, 衍母 $= 487\times 19\times 225600 = 2087476800$.

Y., 4286400(甲衍數), 109867200(乙衍數), 9253(丙衍數).

G., 313(甲奇數), 4(乙奇數), 9253(丙奇數).

以求一術入之列式如

$$\frac{313}{487},\qquad \frac{4}{19},\qquad \frac{9253}{225600}.$$

即 $\frac{473\,(\text{甲乘率})\times 313}{487} = 1$, $\frac{5\,(\text{乙乘率})\times 4}{19} = 1$,

$\frac{172717\,(\text{丙乘率})\times 9253}{225600} = 1$.

$\alpha Y_1 = 2027467200$ (甲泛用)

$\beta Y_2 = 549336000$ (乙泛用) 而 $\theta = 2087476800 =$ 衍母

$\gamma Y_3 = 1598150401$ (丙泛用)

$\Sigma\alpha Y_i = 4174953601$

簡之

$\alpha Y_1 - \frac{\theta}{2} = 983728000$ (甲正用)

$\beta Y_2 = 549336000$ (乙正用) 而 $\frac{\theta}{2} = 1043738400$.

$\gamma Y_3 - \frac{\theta}{2} = 554412001$ (丙正用)

次置天正朔甲戌日 $\frac{410}{940}$ 日，上距甲子 $10\frac{410}{940}$

$$=\frac{39240\ (\text{朔骨})}{3760\ (\text{日法})}$$

冬至丁酉日 $\frac{3}{4}$ 日，上距甲子 $33\frac{3}{4}=\frac{126900\ (\text{氣骨})}{3760\ (\text{日法})}$

b, 乙臢數 = 閏骨 = 126900 (氣骨) $-$ 39240 (朔骨).

c, 丙臢數 = 氣骨 = 126900.

$$b\beta Y_2+c(\gamma Y_3-\frac{\theta}{2})-R\theta = 1531274100.$$

(4) $\frac{1531274100}{1373340\ (\text{氣分數})}=1115$ (歷過年),

而 $1373340=940\times(365\times4+1)$

(1) $\frac{2087476800\ (\text{衍母})}{1373340\ (\text{氣分數})}=1520$ (一會積年).

(2) $\frac{2087476800\ (\text{衍母})}{111036\ (\text{朔分數})}=18800$ (一會積月).

而 $111036=4\times(29\times940+499)$.

(3) $\frac{2087476800\ (\text{衍母})}{225600\ (\text{紀分數})}\times60$ (甲子) $=555180$ (一會積日).

而 $225600=4\times940\times60$.

(5) 1520(一會積年) $-$ 1115(歷過年) = 405(未至年數).

張敦仁求一算術卷下，舉麟德，大衍，崇天，紀元四術及授時曆，以明用此術推求上元積算.

(1)「今有唐麟德術,日法1340,歲實489428,朔實39571.
實測到麟德元年甲子歲天正十一月甲子夜半合朔,冬至爲上元.問上元距麟德元年歲積幾何.答曰積269880算」.

$$489428(\text{歲實})\div 1340(\text{日法}) = 865\frac{328(\text{斗分})}{1340(\text{日法})}$$

以大衍術入之,列式如 $\left|\frac{328(\text{斗分})}{1340(\text{日法})}\right. = \left|\frac{4(\text{等率})\times 82(\text{奇率})}{4(\text{等率})\times 335(\text{蔀率})}\right.$

即 $\left|\frac{4\times 143(\text{因率})\times 82}{4\times 335}\right. = 1.$

$$\text{氣應} = 240,\quad \text{約率} = 60(\text{紀法})\times 4(\text{等率}) = 240.$$

$$\text{入元歲} = 60(\text{紀法})\times\frac{240(\text{氣應})}{240(\text{約率})}\times 143(\text{因率}) = 8580.$$

$$\text{而}\quad \frac{240}{240}\times 143<325(\text{蔀率}),$$

$$\text{氣元率} = 60(\text{紀法})\times 335(\text{蔀率}) = 30100.$$

歲閏 $= 489428$(歲實,秦作歲率)-12(歲月)$\times 39571$(朔實)
$= 14576.$

$$\frac{14576(\text{歲閏})\times 8580(\text{入元歲})}{39571(\text{朔實})} = 136\frac{17720(\text{入閏})}{39571(\text{朔實})}$$

$$\text{閏縮} = 17770(\text{閏餘或閏應}) - 17720(\text{入閏}) = 50.$$

$$\frac{14576(\text{歲閏})\times 20100(\text{氣元率})}{39571(\text{朔實})} = 743\frac{33487(\text{元閏})}{39571(\text{朔實})}$$

以大衍術入之,列式如 $\left|\frac{33487(\text{元閏})}{39571(\text{朔實})}\right.=\left|\frac{1(\text{等數})\times 33487(\text{奇數})}{1(\text{等數})\times 39571(\text{蓓數})}\right.$

即 $\left|\frac{1\times 37197(\text{因數})\times 33487}{39571}\right.\times 1.$

$$\frac{50(\text{閏縮})\times 37197(\text{因數})}{1(\text{等數})\times 39571(\text{蓓數})}=47\frac{13(\text{乘元限數})}{39571}$$

朔積年 $=13$(乘元限數)$\times 20100$(氣元率)$=261300.$

積算 $=261300$(朔積年)$+8580$(入元歲)$=269880.$

(2)「今有唐大衍術,日法3040,歲實1110343,朔實89773,實測到開元十二年甲子歲天正冬至日辰戊寅小餘2260,閏餘49107,欲以甲子歲天正十一月甲子夜半合朔冬至爲上元,問上元距開元十二年積算幾何. 答曰積96961740算」.

1110343(歲實)$\div$3040(日法)$=365\frac{743(\text{斗分})}{3040(\text{日法})}$

以大衍術入之,列式如 $\left|\frac{743(\text{斗分})}{3040(\text{日法})}\right.=\left|\frac{1(\text{等率})\times 743(\text{奇率})}{1(\text{等率})\times 3040(\text{蓓率})}\right.$.

即 $\left|\frac{1\times 1207(\text{因率})\times 743}{1\times 3040}\right.=1.$

乃視天正冬至日辰戊寅,今欲令上元起甲子日則爲大餘14.開元十二年甲子氣應$=14\times 3040+2260=44820.$

約率 $=60$(紀法)$\times 1$(等率)$=60.$

$$\text{入元歲}=\frac{60\,(\text{紀法})\times 44820\,(\text{氣應})}{3040\,(\text{蔀率})\times 60\,(\text{約率})}\times 1207\,(\text{因率})$$

$$=107340.$$

而 $\frac{44820}{60}\times 1207>3040\,(\text{蔀率}),$

$$\text{氣元率}=60\,(\text{紀法})\times 3040\,(\text{蔀率})=182400.$$

$$\text{歲閏}=1110343\,(\text{歲實})-12\times 89773\,(\text{朔實})=33067.$$

$$\frac{33067\,(\text{歲閏})\times 117340\,(\text{入元歲})}{89773\,(\text{朔實})}=39537\frac{56679\,(\text{入閏})}{89773\,(\text{朔實})}.$$

$$\text{閏縮}=49107\,(\text{閏餘})+89773\,(\text{朔實})-56679\,(\text{入閏})=82201.$$

$$\frac{33067\,(\text{歲閏})\times 18240\,(\text{氣元率})}{89773\,(\text{朔實})}=67185\frac{21795\,(\text{元閏})}{89773\,(\text{朔實})}.$$

以大衍術入之,列式如 $\left|\frac{21795(\text{元閏})}{89773(\text{朔實})}=\frac{1(\text{等數})\times 21795(\text{奇數})}{1(\text{等數})\times 89773(\text{蔀數})}\right.$.

即 $\left|\frac{1\times 55948\,(\text{因數})\times 21795}{1\times 89773}=1.\right.$

$$\frac{82201\,(\text{閏縮})\times 55948\,(\text{因數})}{1\,(\text{等數})\times 89773\,(\text{蔀數})}=51229\frac{531\,(\text{乘元限數})}{89773\,(\text{蔀數})}$$

$$\text{朔積年}=531\,(\text{乘元限數})\times 182400\,(\text{氣元率})=96854400.$$

$$\text{積算}=96854400\,(\text{朔積年})+107340\,(\text{入元歲})$$

$$=96961740.$$

17. 大衍求一術在日本之影響

大衍求一術,在日本亦得相當之影響,關孝和(1642-1708)研幾算法序謂其翦管術出於唐穆宗之宣明歷.其遺編括要算法爲荒木村英檢閱,大高由昌校訂,寶永己丑(1709)出版.卷亨論諸約之法,分爲互約,逐約,齊約,遍約,增約,損約,零約,遍通,剩一,翦管,各條.今逐條錄舉其例,以見其與中法之異同焉.

「互約.

今有36個,48個,問互約之各幾何.

答曰36爲9,48爲16.

術曰36與48互減得等數12,以約36爲3,3與48互減得等數3,以因3爲9,約48爲16.

又術曰48與36互減得等數12,以約48爲4,4與36互減得等數4,以4因4爲16,約36爲9合問」.

「逐約.

今有105個,112個,126個,問逐約之各幾何.

答曰105爲5,112爲16,126爲63.

術曰105與112依互約術105爲15,112不約.

15與126依互約術,15爲5,126不約.

112與126依互約術,112爲16,126爲63合問」.

「齊約.

今有6個8個問齊約之幾何.

答曰24.

術曰6與8互減得等數2,以約6得3,3與8相因得24合問」.

「遍約.

今有8個10個問遍約之各幾何.

答曰8爲4,10爲5.

術曰8與10互減得等數2爲約數,以遍約之8爲4,10爲5合問」.

「增約.

今有原10個逐增6分,問極數幾何.

答曰極數25個.

術曰置1內減6分,餘4分爲法,以原10個爲實,實如法而一,得極數,合問」.

按極數 $25=10+6+3.6+2.16+1.296+0.7776+0.46656$

$+0.279936+\cdots\cdots$

「損約.

今有原12個,逐損4分,問極數幾何.

答曰極數4個.

術曰置 1 內減 4 分,餘 6 分爲法,置 4 分倍之得 8 分,以減 1 餘 2 分乘原 12 個得 2 個 4 分爲實,實如法而一,得極數合問」.

按極數 $4=12-4.8-1.92-0.768-0.3072-0.12288$

$-0.049152-0.0196608-\cdots$

「零約.

今有方 1 尺,斜 1.41421 尺強,問零約之,內外親疎方斜率各幾何.

答曰	內疎	方率	5,	斜率	7.
	外疎	方率	7,	斜率	10.
	內親	方率	29,	斜率	41.
	外親	方率	41,	斜率	58.

術曰斜率 1, 方率 1 爲初,以斜率爲實,以方率爲法,實如法而一,得數[一位定尺]少於原斜者,斜率 2, 方率 1; 多於原斜者,斜率 1, 方率 1. 各累加之,得內外親疎方斜率.[右外雖有最親者,方斜率繁多,故略之,以此術可準知也]合問」.

按所得少於原斜 $\sqrt{2}=1.41421$ 時方斜率爲 $\frac{1}{1}$ (A).

所得多於原斜 $\sqrt{2}=1.41421$ 時方斜率爲 $\frac{2}{1}$ (B).

先令 $\dfrac{2+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}(=1.5)>\sqrt{2}$

$$\frac{3+1}{2+1}=\frac{4}{3}(=1.33)<\sqrt{2}$$

$$\frac{4+2}{3+1}=\frac{6}{4}(=1.5)>\sqrt{2}$$

$$\frac{6+1}{4+1}=\frac{7}{5}(=1.4)<\sqrt{2}$$ 爲第一答.

又 $$\frac{7+2}{5+1}=\frac{9}{6}(=1.5)>\sqrt{2}$$

$$\frac{9+1}{6+1}=\frac{10}{7}(=1.42\cdots)>\sqrt{2}$$ 爲第二答.

同理得 $\frac{11}{8}$ 少, $\frac{13}{9}$ 多, $\frac{14}{10}$ 少, $\frac{16}{11}$ 多, $\frac{17}{12}$ 多,……

遂得第三答 $\frac{41}{29}$, 及第四答 $\frac{58}{41}$.

零約術頗與李銳之日法朔餘強弱考所述相類.

「遍通.

今有 $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$ 問遍通之各幾何.

答曰 $\frac{5}{6}$ 爲 $\frac{20}{24}$, $\frac{3}{8}$ 爲 $\frac{9}{24}$.

術曰分母6與分母8,依齊約術得24爲同分母,以各分子乘之,以各分子約之,得合問」.

「剩一.

今有以左19累加之,得數以右27累減之剩一,問左總數幾何.

答曰左總數190.

術曰以左19除右27得商1,不盡8爲甲.

以甲不盡8除19得商2,不盡3爲乙.

以乙不盡3除甲不盡8得商2,不盡2爲丙.

以丙不盡2除乙不盡3得商1,不盡1爲丁[乃除左一而止].

甲商與乙商相因,加定1得3爲子.

子與丙商相因,加甲商得7爲丑.

丑與丁商相因,加子得10,[是左段數]以左19乘之,得左總數190合問」.

此方法與秦九韶大衍求一術全相一致.

「竊管術解.

算法統宗物不知總數 孫子歌曰.

三人同時七十稀, 五樹梅花廿一枝,

七子團圓正半月, 除百令五便得知.

今有物不知總數,只云三除餘二個,五除餘一個,七除餘五個,問總數幾何. 答曰總數26個.

術曰3除餘以70乘之得[144個],5除餘以21乘之得[21個],7除餘以15乘之得[75個],三位相併共得[236個]滿105去之餘26爲總數,合問.

解曰,[依逐約術3,5,7皆不約].5,7相因得35爲

左,以3爲右,依剩一術得70爲3除法.3,7相因得21爲左,以5爲右,依剩一術得21爲5除法.3,5相因得15爲左,以7爲右,依剩一術得15爲7除法.3,5,7相乘得105爲去法」.

上列各條,除增約,損約外均與大衍求一術有關,而翦管術語出於楊輝,孫子題問錄自程氏,則尤顯而易見也.

18. 大衍求一術在世界數學史上之位置

代數「當中國六朝時,希臘有丟番都(Diophantus)者傳其法,但用數不用記號,而天竺已先有之,且精於丟氏,能推一次二次,并有求一法,甚賅備,幾與秦九韶大衍術相埒.」(註)孫子若視爲六朝時人,則較希臘Diophantus稍後,而在印度Mahāvīracārya之前.直至Euler (1707—1783), Lagrange (1736—1813), Gauss (1777—1855) 之徒出,此項問題方得深切之研究,而Gauss在Disquisitions內所述之解法,尤與中法相類.

Matthiesen於1874之Zeitschrift f. math. und naturw. Unterricht, VII. pp. 73—81首先以中國,印度之解析法互相較論,旣在1876之Zeitschrift Math. Phys. XIX. pp.

(註) 語見咸豐九年(1859)偉烈亞力代數學序.

270—271復於大衍術作詳細之解說.厥後德之Cartor,日之三上義夫幷於大衍術爲鄭重之介紹.比教士Le Rév. Père Vanhée於通報T'oung-pao, Vol. XIV. pp. 11—26, Leide, 1913上著Les cent volailles ou Analyse indéterminée en Chine.則所介紹更爲詳細焉.

19. 大衍求一術與連分數

任何分數可化爲連分數.卽分數$\frac{G}{A}$可以$q_0+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\frac{1}{q_4}+\cdots\cdots+\frac{1}{q_n}+\frac{r_n}{r_{n-1}}$之連分數表之.就中$n$常爲偶數,$r_n=1$, $G<A$, $q_0=0$.其逐次之漸近分數爲

$$\frac{q_0}{1}=\frac{\mu_0}{a_0},\ \frac{q_1q_0+1}{q_1}=\frac{\mu_1}{a_1},\ \frac{q_2\mu_1+\mu_0}{q_2a_1+a_0}=\frac{\mu_2}{a_2},\ \frac{q_3\mu_2+\mu_1}{q_3a_2+a_1}=\frac{\mu_3}{a_3},\cdots$$

$$\cdots\cdots,\ \frac{\mu_n}{a_n}=\frac{q_n\mu_{n-1}+\mu_{n-2}}{q_na_{n-1}+a_{n-2}}.$$

而$\frac{\mu_n}{a_n}$爲直在$\frac{G}{A}$前之漸近分數,因n爲偶數,依連分數定理,則

$Ga_n-A\mu_n=(-1)^n=1$. 卽

$a_nG\times\mu_nA+1$, $\therefore\ \left|\frac{aG}{A}\right.=1.$

大衍求一術所求乘率a_n,卽求直在$\frac{G}{A}$前漸近分數之分母,如

$$\frac{52}{55}=0+\frac{1}{1}+\frac{1}{17}+\frac{1}{3}\overset{(r_2)}{}, \quad \alpha=18$$

$$(q_0)\quad(q_1)\quad(q_2)\qquad(r_1)$$

$$\frac{87}{247}=0+\frac{1}{15}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\overset{(r_4)}{}, \quad \beta=139 \text{ 是也.}$$

$$(q_0)\quad(q_1)\quad(q_2)\quad(q_3)\quad(q_4)\qquad(r_3)$$

20. 大衍求一術與百雞術

百雞題問見於張邱建算經卷末，一問數答，爲他舊算書所未有.駱騰鳳藝游錄以大衍求一術解之，盡合題意.時曰醇別作百雞術衍幷附求一術解法，以補駱氏之不足.錢寶琮別有「百雞術源流考」刊入學藝三卷三號(十年七月)，可參觀焉.

21. 大衍求一術與不定方程

孫子題問曾紀鴻(1848-1877)以代數式解之，附載求一術通解卷下，如

$$\left|\frac{N}{(3,5,7)}=(2,3,2).\ N=3x+2=5y+3.\ \text{或}\ 3x=5y+1,\right.$$

$$x=y+\frac{2y+1}{3}=y+\alpha.\quad y=\frac{3\alpha-1}{2}=\alpha+\frac{\alpha-1}{2}=\alpha+\beta,\ \alpha=2\beta+1.$$

故　$\alpha=2\beta+1,\quad y=3\beta+1,\quad x=5\beta+2.$

而 $N=3x+2=15\beta+8$.

又 $N=7x+2=15\beta+8$, 或 $7x=15\beta+6$, $x=2\beta+\frac{\beta+6}{7}=2\beta+\gamma$.

故 $\beta=7\gamma-6$, $x=15\gamma-12$.

而 $N=7x+2=105\gamma-82$.

令 $\gamma=1$, 則 $N=23$.

陳志堅求一得齊算學(1904)演無定式,謂孫子算經物不知數題,及張丘建雞翁雞母題,以無定方程馭之,則兩術不難貫爲一條,幷謂

$\frac{N}{(3,5,7,13)}=(2,3,2,9)$, 題之答數1283, 其答數無窮.

22. 何承天調日法與零約

宋何承天調日法,用強弱二率,齊祖冲之求圓周立約密二率,錢寶琮以爲皆似得之於求一術.說見學藝三卷四號(十年八月).惟調日法及綴術今都失傳,不得斷定.而李銳之日法朔餘強弱考與日本關孝和之零約則有相同之點,可較論焉.

括要算法第四卷(1709)用零約求周徑率,以「周率三徑率一爲初,以周率爲實,以徑率爲法,實如法而一,得數少於定周者,周率四徑率一,多於定周者,周率三徑率一,各累加之」卽

$$\frac{3}{1}>\text{周},\quad \frac{4}{1}>\text{周}$$

$$\frac{3+4}{1+1}=\frac{7}{2}(=3.5)\qquad >\text{周}.$$

$$\frac{7+3}{2+1}=\frac{10}{3}(=3.33\cdots)\quad >\text{周}.$$

$$\frac{10+3}{3+1}=\frac{13}{4}(=3.25)\qquad >\text{周}.$$

逐次得 $\frac{3}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{4},\ \frac{19}{6},\ \frac{22}{7},\ \frac{25}{8},\ \frac{29}{9},\ \frac{32}{10},\ \frac{35}{11},\ \frac{38}{12},$

$\frac{41}{13},\ \frac{44}{14},\ \frac{47}{15},\ \frac{51}{16},\ \frac{54}{17},\ \frac{57}{18},\ \frac{60}{19},\ \frac{63}{20},\ \frac{66}{21},\ \frac{69}{22},\ \frac{73}{23},\ \frac{76}{24},$

$\frac{79}{25},\ \frac{82}{26},\ \frac{85}{27},\ \frac{88}{28},\ \frac{91}{29},\ \frac{95}{30},\ \frac{98}{31},\ \frac{101}{32},\ \frac{104}{33},\ \frac{107}{34},$

$\frac{110}{35},\ \frac{113}{36},\ \frac{117}{37},\ \frac{120}{38},\ \frac{123}{39},\ \frac{126}{40},\ \frac{129}{41},\ \frac{132}{42},$

$\frac{135}{43},\ \frac{139}{44},\ \frac{142}{45},\ \frac{145}{46},\ \frac{148}{47},\ \frac{151}{48},\ \frac{154}{49},\ \frac{157}{50},$

$\frac{161}{51},\ \cdots\cdots,\ \frac{355}{133}.$

若依李銳之法，則收歛可以較速，即

$$\frac{3}{1}<\text{周},\quad \frac{4}{1}<\text{周}.$$

逐次得 $\frac{3}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{19}{6},\ \frac{22}{7},\ \frac{25}{8},\ \frac{47}{15},\ \cdots\cdots,\ \frac{157}{50},$

$\cdots\cdots,\ \frac{333}{106},\ \cdots\cdots,\ \frac{355}{113}$ 是也.

且就李銳之法以$\frac{22}{7}$爲强率，$\frac{157}{50}$爲弱率，因之求得

$\pi=\frac{355}{113}$，而强數爲9，弱數爲1.

即 $\pi=\frac{355}{113}=\frac{22\times9+157\times1}{7\times9+50\times1}$.

23. 晚近關於求一術之論著

秦九韶數書九章以宜稼堂叢書本流傳爲最廣.勞乃宣籌算考釋續編(1900)卷五,六論求一,卷七論求一方程,亦與學者不少之與會.光緒丁酉(1897)劉彝程弟子龔傑著求一捷法設爲四例以代大衍術.

「一例. 凡題中約數僅有一項,如云以7約之餘6,則可見最小數爲13,或云以8約之餘3,則可見最小數爲11.

二例. 凡題中約數,設有二例,則約數必一大一小,當由約數之大者求之,如云以7約之餘6,以3約之餘2,可求得7約之最小數爲13,其倍數爲7,此數3約之,未必餘2,故以倍數遞加之,至3約餘2爲止.

三例. 設約數有多項,仍依前例,求得最大兩個約數之最小數,以兩約數相乘爲倍數,仍如前法,以求第三數.

四例．約數多一項，則求法亦多一次」．

設題如 $\left|\frac{N}{(17,13,11,9,7)}\right.=(7,3,1,8,4.)$

則 $\frac{N}{17}=7$，N 之最小數爲 24，其倍數爲 17．

依例得 $(24+17m)-13n=3$．求得 $m=11$．

則 $\left|\frac{24+17m}{16\times 13}\right.=(7,3)$ 時 N 之最小數爲 211．

其倍數 $221=17\times 13$．

又得 $(211+221m)-11n=1$．求得 $m=10$．

則 $\left|\frac{211+221m}{17\times 13\times 11}\right.=(7,3,1)$ 時 N 之最小數爲 2421．

其倍數 $2431=17\times 13\times 11$．

又得 $(2421+2431m)-9n=8$．求得 $m=8$．

則 $\left|\frac{2421+2431m}{17\times 13\times 11\times 9}\right.=(7,3,1,8)$ 時 N 之最小數爲 21869．

其倍數 $21879=17\times 13\times 11\times 9$．

因 $\left|\frac{21869}{7}\right.=4$，故此題 $N=21869$．

近則傅種孫之大衍術載於北高數理雜誌第一期．錢寶琮之求一術源流考載於學藝三卷四號（十年八月），徐震池之商餘求原法載於科學十卷二期（十四年五月），皆論述此問題也．錢氏於求一術得三簡

法,而徐氏則未閱中法,亦能得相同之結果,尤爲難能.然大衍求一術與他算法尚多關聯,正有廣大地域,爲學者考究之餘地,因不憚詳述古今關於此術已研得之結果,并與他算法關係之大略,深望將來發揚光大爲中算增光,此則標題「大衍求一術之過去與未來」之微意也.

十四年九月於靈寶.

敦煌石室算書

敦煌石室「算書」現藏法國巴黎圖書館，爲伯希和氏敦煌將來目錄之第二六六七號．伯希和君影攝見贈．此卷除首尾殘缺外，有十二題可讀，爲吾國現存寫本算書之最古者．校讎既畢，錄載於此，用公同好．

李儼識

今有馬七萬八千九百八十五疋．三萬二千三百二十三疋上馬，日給粟五升．二萬四千三百卌一疋中馬，日給粟四升．二萬二千三百廿一疋下馬，日給粟三升．問前件三等馬一日，十日，一月，一年之食粟各幾何？曰一日合食粟三萬二千五百九十四𣂕二升，十日合食卅二萬五千九百卌二𣂕二升，一月食九十七萬七千八百廿六𣂕，一年食一千一百七十三萬三千九百一十二𣂕．術曰，置上馬三萬二千三百廿三疋，以五升乘之，退一等，得上馬一日食粟一萬六千一百六十一𣂕五升，置於上方．次置中馬二萬四千三百卌一疋，以四升乘之，退一等，得中馬一日食粟九千七百卅六𣂕四升，亦置上方．次置下

馬二萬二千三百廿一疋，以三升乘之，退位一等，得下馬一日食粟六千六百九十六斛三升．惣併三位得都合一日食粟三萬二千五百九十四斛二升，上十之，得十日都食卅二萬五千九百卌二斛，又以三因之，得一月都合食粟九十七萬七千八百廿六斛，又以十二乘之，得一年都合食粟一千一百七十三萬三千九百十二斛．

營造部第七，

今有塹廣八尺，下無廣，深八尺，長七百卅五尺，問千尺爲一方，凡得幾何方．曰廿三方，不盡五百二十尺．術曰，先張長七百卅尺，深次，廣八尺，半之得四尺，以四尺乘之，得二千九百卌尺，深八尺乘之，得二萬三千五百廿，以一千尺於下除之，卽得．

今有堤下廣五丈，上廣三丈，高二丈，長六十尺，限用一千二百人，一日人二尺．問凡用幾何日得了．曰二十日得了．術曰，置上廣卅尺，下廣五十尺併之，得八十尺，半之得卌尺，以高廿尺乘之得八百尺，復以其長六十尺乘之，得四萬八千尺於上．次列一千二百尺一日二尺乘之，得二千四百尺，以二千四百尺除上位，卽得．

今有屋東西長六丈,廣三丈,尺用瓦二枚.問總得幾何瓦.曰三千六百枚.術曰,以廣卅尺乘長六十尺得積尺一千八百尺,以瓦二枚乘得三千六百枚.

今有城周廻十七里二十五步,欲豎鹿角柎,三尺立一根.問凡幾何根.曰用四千二百五十根.術曰,城七里,以三百步乘之,內廿五,得二千一百廿五,以六尺因之得積尺,得一萬二千七百五十尺,以三尺除之,卽得根數四千二百五十根.

今有綿七千二百廿六斤,欲造袍,領別用綿八斤.問物合着綿得幾領.曰九百三領余二斤.術曰,先張綿七千二百二十六斤於上,以八斤於上除之,卽得袍九百三領,余二斤.

今欲造袍一千八百九十二領,凡別用紫,帛各三丈五尺.問惣紫,帛幾何.曰合用二千三百一十一疋,一千六百五十五疋二丈紫,一千六百五十五疋二丈帛.

今有城周迴十八里,四面有門,門有二樓;又四角,角有一大樓,一十五小樓.廿步置一弩,卅步置一方梁,六十步置一石車,五步置一鉤.一大樓上着卅人,一小樓着廿人,弩着三人,一方梁着八,石車置廿

人,一鈎置二人,又欲一步着戰士一人.問凡用兵幾何.曰一十二大樓用人四百八十個,小樓用人一千二百,二百七十張弩,用人八百一十,一百卅五方梁,用人一千八十人,九十個石車,用人一千八百人,一千八十枚鈎,用人二千一百六十人,五千四百步,用人五千四百.術曰,先張大樓十二以卌乘之得四百八十人.次張小樓十五以四乘之得小樓六十,以二十乘之,得一千二百人.次張城十八里以三百步乘之,得積步五千四百,次以廿除之,得弩二百七十張,以三人因之得八百一十人.次更置積步五千四百,以卌步除之得方梁一百卅五,以八因之,得一千八十人.次置積步五千四百,六十步除之得石車九十,以廿人乘之,得一千八百人.次更置積步五千四百以五步除之得鈎一千八十枚,以二人乘之,得二千一百六十人.次更置積步五千四百以一人因之得一,乘步長,遂得五千四百人卽是.欲得都數併之得一萬二千九百卅人.

今有四王各領九軍出征,一軍有儀同,欲使二人共馭,三馭共火,四火共帥,五帥共將,六將共一都督,七都督共一營主,八營主共一儀同.問合得幾何.

曰四王,卅六儀同,二百八十八營主,二千一十六都督,一萬二千九十六將,二萬四百八十帥,二十四萬一千九百二十火,七十二萬五千七百六十馱,一百三十五萬一千五百二十人正身.術曰,先張四王以九因之,得儀同之數卅六人.次以八因之,得營主之數二百八十八人.次以七因之,得都督之數二千一十六人.次以六因之,得大將之數一萬二千九十六人.次以五因之,得帥之數六萬四百八十人.次以四因之,得火之數廿四萬一千九百廿火.次以三因之,得馱之數七十二萬五千七百六十.次以二因之,得正身數一百卅五萬一千五百廿人,卽得.

□□部第九.

今有木方三尺,高三尺,欲方五寸,作枕一枚.問惣得幾何.曰二百一十六枚.術曰,以方三尺乘之,得九尺,以高三尺乘之,得廿七尺,又以八因之,卽得枕數.

今有蠟方三尺高三尺,欲一日燃方寸,問得幾日燃.曰得七十五年燃.術曰,方三尺自相乘得九尺,復以高三尺乘之,得廿七尺,遷上十作寸,得二萬七千寸,以三百六十日除之,卽得.

今有木廣三尺,長三尺,高三尺,欲方三寸,作杭一枚,問惣得杭幾何.曰一千枚.術曰,廣長自相乘得九尺,復以高三尺乘之得二十七尺,遷十作寸,得二萬七千寸.次方三寸自相乘得九寸,復以高三寸乘之,得二十七寸,以二十七寸除之,即得杭數.

明代算學書志

嚴恭通原算法一卷,明洪武五年(1372)嚴恭撰.

李儼所藏鈔本諸家算法中有嚴恭通原算法最題及序文.書爲莫友芝(1811—1871)子繩孫舊藏.

李儼所藏影攝本永樂大典卷一六三四三之一六三四四,十翰,算法十四之十五,亦有嚴恭通原算法最題.原書藏英劍橋大學.按諸家算法亦錄自永樂大典.

洪武壬子(1372)迎夏日朝列大夫潮州府趙璃序稱「……姑蘇嚴君恭幼讀之,以明其理,長試吏術,其緒餘乃及於數學,而益致其精.一日袖書一卷示予,名曰通原算法.自言以兵亂失故傳,此特其默集者爾,欲鋟諸梓,以廣其傳,屬予引其端,……」

鈔本諸家算法最題中有大衍求一術題問,李儼大衍求一術之過去與未來(註1)文中,曾引及之.

(註1) 李儼大衍求一術之過去與未來第四頁,學藝雜誌第七

裘沖曼中國算學書目彙編載有通原算法二册(註2).

九章通明算法口卷,永樂二十二年(1424)劉仕隆撰.

「永樂二十二年(1424)臨江劉仕隆作九章而無乘除等法.後作難題三十三款」見程大位算法統宗(1593)卷十三,第十三頁.(註3)又見梅瑴成(1681—1763)增删算法統宗卷首「古今算學書目」.(註4)算法統宗卷首又稱「夫難題昉於永樂四年(1406)臨江劉仕隆公偕內閣諸君預修大典退公之暇,編成雜法,附於九章通明之後……」

指明算法二卷,正統四年(1439)夏源澤撰

「正統己未(1439)江寧夏源澤作,九章不全」,見算法統宗卷十三,及增删算法統宗卷首.

卷第二號,中華學藝社,民國十四年(1925)上海.

(註2) 清華學報第三卷,第一期,北京清華學校學報社民國十五年(1926)六月.

(註3) 古今圖書集成,曆象彙編,曆法典,第一二五卷,算法部彙考十七.

(註4) 光緒戊戌(1898)江蘇書局刊本.

按明高儒百川書志(1540)卷十一第五頁有「指明算法二卷,不知作者,二十四則」(註5) 再續百川學海癸集作二卷.

九章比類算法十卷(?),景泰九年(1450)吳信民撰.

「景泰庚午(1450)錢塘吳信民作,共八本,有乘除,分九章,每章後有難題.其書章類紊亂,差訛者多」,見算法統宗卷十三,及增删算法統宗卷首.又「錢塘吳信民九章比類與諸家算法中詩詞歌括口號總集,名曰難題.」見算法統宗卷首.

按明周述學神道大編歷宗算會稱;吳敬詳註九章.天一閣藏明刊本吳敬編算法大全十卷,一作八本.(註6) 清初武林清來堂書目載有明吳敬比類算法大全.明趙琦美脈望館書目有九章算法比類大全八本,又算法大全四本.(註7) 疑敬即信民,未知是否.

古今捷法□卷,乘除秘訣□卷,日用便覽□卷.

(註5) 民國乙卯(1915)長沙葉氏觀古堂刻本.

(註6) 玉簡齋叢書二集本.

(註7) 趙琦美脈望館書目第二册第四十二頁,涵芬樓秘笈第六集,上海商務印書館印本,民國七年(1918)十月.

以上三書見譚文數學尋源卷之一(乾隆十五年1750自序),置於九章通明及九章比類算法間,疑亦明人著作.譚文自稱「其未經目見者,不敢妄載,」則各書當時必具在也.

算學通術□卷成化八年(1472)劉洪撰.

「成化壬辰(1472)京兆劉洪作」見算法統宗卷十三,及增刪算法統宗卷首.

九章詳註算法九卷,成化十四年(1478)許榮撰.

「成化戊戌(1478)金陵許榮作,採取吳氏法」見算法統宗卷十三,及增刪算法統宗卷首.

按明高儒百川書志(註8)卷十一第六頁有「九章算法詳註九卷,金陵許榮孟仁重編」.

九章詳通算法□卷,成化十九年(1483)余進撰.

「成化癸卯(1482)鄱陽余進作,採取詳明,通明法」見算法統宗卷十三,及增刪算法統宗卷首.

按算法統宗卷十三稱;「詳明算法元儒安止齊,何平子作,有乘除而無九章.」李儼所藏諸家算法載其序文及最題,作二卷.李儼所藏永樂大典卷一六

(註8) 民國乙卯(1915)長沙葉氏觀古堂刻本.明嘉靖庚子(1540)自序.

三四三之一六三四四，十翰，算法十四之十五，其中收錄詳明算法最題，有爲諸家算法所未收者．又通明即劉仕隆之通明算法．

啟蒙發明算法□卷，嘉靖五年(1526)鄭高昇撰．

「嘉靖丙戌(1526)福山鄭高昇作」，見算法統宗卷十三，及增删算法統宗卷首．

按明朱睦㮮萬卷堂書目(明隆慶庚午，1570，自序)卷三第九頁(註9)有「啟蒙算法四册」當即此書．

改正算法口卷，嘉靖五年(1526)馬傑撰．

「河間吳橋人，嘉靖丙戌(1526)作，而無乘除，只改錢塘吳信民法，反正爲邪數款，今予辯明，圖釋參校，免誤後學」見圖書集成本算法統宗卷十三，而增删算法統宗卷首題「戊戌(1538)作」．

又算法統宗卷三稱；「孤峯馬傑斷曰；錢塘算師吳信民，編集比類仕罕聞，孤峯裁改崔坡校，錢山之法有差爭.」…「據傑用方束之法，反正爲邪，共免有左，殊不知束積皆是論個論隻之物，無零，宜當除根，不辯明矣．束法具載第六卷，少廣章.」

按吳橋屬河間府景州，在州東．見明史卷四十．

(註9) 光緒癸卯(1903)長沙葉氏刻本．

句股算術二卷,嘉靖十二年(1533)顧應祥撰.

浙江圖書館藏有明嘉靖癸丑(1553)刻本句股算術上下卷,前有顧應祥(1483—1565)自序稱:「…應祥自幼性好數學,然無師傅,每得諸家算書,輒中夜思索,至於不寐,久之,若有神告之者,遂盡得其術.既而又得周髀及四元玉鑑諸書,於是所謂句股弦和較黃中之說,開闔折變,悉得古人立法之旨,….」末題「歲嘉靖癸巳(1533)夏四月朔,吳興箬溪道人顧應祥書於滇南巡撫行臺.」

正明算法□卷,嘉靖十八年(1539)張爵撰.

「嘉靖己亥(1539)金臺張爵作」見算法統宗卷十三,及增删算法統宗卷首.

算理明解□卷,嘉靖二十年(1540)陳必智撰.

「嘉靖庚子(1540)江西寧都陳必智作」見算法統宗卷十三,及增删算法統宗卷首.

按寧都屬江西贛州府,在府東北.見明史卷四十二.

重明算法□卷,嘉靖二十年(1540)林高撰.

訂正算法□卷,嘉靖二十年(1540)林高撰.

「嘉靖庚子(1540)浙東會稽林高作,詳解定位.」

見算法統宗卷十三.

測圓海鏡分類釋術十卷,嘉靖二十九年(1550)顧應祥撰.

按趙魏竹崦盦傳鈔書目載有「測圓海鏡分類釋術十卷,明顧應祥撰,二百三十一(頁)」.(註10)

浙江圖書館藏有明嘉靖庚戌(1550)刻本顧應祥撰測圓海鏡分類釋術十卷.

弧矢算術無卷數,嘉靖三十一年(1552)顧應祥撰.

「嘉靖壬子(1552)顧若溪作,無乘除」.見算法統宗卷十三.

涵芬樓秘笈第六集本脈望館書目第二册第四十三頁,載「弧矢算術,方圓術,黄鍾術,句股術共一本」.(註11)

浙江圖書館藏有明嘉靖癸丑(1553)刻弧矢算術一本.卷前序稱;「弧矢一術,古今算法所載者絕少.錢塘吳信民九章算法止載一條,四元玉鑑所載數條,皆不言其所以然之故,沈存中夢溪筆談有割

(註10) 長沙葉氏觀古堂刻本.

(註11) 上海商務印書館,民國七年(1918)印本.

圓之法,雖自謂造微,然止於徑矢求弦.而於弦背求矢,截積求矢諸法,俱未備,予每病之.南曹訟牒頗暇,乃取諸家算書,間附己意,各立一法,名曰弧矢算術,藏諸篋笥,俟高明之士取正焉.未敢謂盡得其閫奧也」.「嘉靖壬子(1552)春三月吉吳興顧應祥識」.又有方圓術,黃鍾算附載卷後.

測圓算術四卷,嘉靖三十二年(1553)顧應祥撰.

涵芬樓秘笈第六集本脈望館書目第二册第四十三頁載有「測圓算術一本」.

浙江圖書館藏有明嘉靖癸丑(1553)刻本測圓算術,前有序稱;「句股求容圓之徑,古有其法,未有若元翰林學士欒城李先生之精且密也.其所箸測圓海鏡,設爲天,地,日,月,山,川,東,西,南,北,乾,坤,艮,巽,名號.而以通句股,邊句股,底句股等錯綜而求之,極爲明備.但每條細草,止以天元一立算,而漫無下手之處.應祥已爲之類釋.既而思之,猶有未當於心者.…於是別出己見,復爲編次其難曉者,….」「嘉靖癸丑(1553)夏四月望吳興顧應祥志.」又有後序一篇,題「嘉靖癸丑(1553)夏六月望前二日,屬下郎中龐嵩頓首謹書」.

神道大編歷宗算會十五卷,嘉靖三十七年(1558)周述學撰。

此書題山陰雲淵周述學繼志輯撰,凡十五卷,篇首有一序,僅存;

「嘉靖戊午仲夏天中節.

賜進士第朝列大夫國子祭酒前春坊.

太子中允翰林修撰.

經筵國史六峯周文燭撰」.

四行.

此書梅文鼎曾見及.梅氏少廣拾遺及勿菴歷算書目并題此書.黃宗羲南雷文約爲周述學作傳,則未舉之.阮元疇人傳僅稱「周述學…撰補弧矢.則此書湮沒將三百年矣」.

江南圖書館藏有歷宗算會八册.第一册卷一入算,卷二子母分法.第二册卷三句股.第三册卷四開方,卷五立方,卷六平圓.第四册卷七弧矢經補上,卷八弧矢經補下.第五册卷九分法互分.第六册卷十總分,卷十一各分.第七册卷十二積法.第八册卷十三立積,卷十四隙積,算會聖賢姓氏,卷十五歌訣.

算林拔萃口卷,隆慶六年(1572)楊溥撰.

「隆慶壬申(1572)宛陵太邑楊溥作」.見算法統宗卷十三.

數學通軌□卷,萬歷六年(1578),柯尚遷撰.

按柯尚遷明長樂人,字喬可,自號陽石山人,嘉靖中由貢生官邢臺縣丞.所著數學通軌,論述算盤,事在程大位算法統宗前.

一鴻算法□卷,萬曆十二年(1584)余楷撰.

「萬曆甲申(1589)銀邑余楷撰」.見算法統宗卷十三.

庸章算法□卷,萬曆十六年(1588)朱元濬撰.

「萬曆戊子(1588)新安朱元濬作」.見算法統宗卷十三,及增删算法統宗卷首.

算海詳說□卷,李長茂撰.

見算法統宗及勿菴曆算書目.

算法統宗十三卷,萬曆二十一年(1593)程大位撰.

「程大位字汝思,號賓渠,新安人,少遊吳楚,舉生平師友之所講求,咨詢之所獨得者,箸算法統宗十三卷.以古九章爲目,後以難題附之.萬歷癸巳(1593)浙江(卽浙江)吳繼授爲之序.

幾何原本前六卷，萬歷三十五年(1607)利瑪竇徐光啓共譯.

萬歷八年(1581)利瑪竇(Ricci, Matteo, 1529－1610)始汎海九萬里，抵廣州之香山澳」.見明史第三二六卷.「利瑪竇由澳門轉入八閩至金陵，出其渾天儀，量天尺，句股舉要算法，留都臺省」.見澳門記略卷下.(註12)萬歷三十一年(1603)利瑪竇與徐光啓(1562－1634)計議譯幾何原本.至三十四年(1606)秋始實行，三十五年(1607)春譯成，并在北京出版.(註13)

圜容較義無卷數，萬歷三十七年(1609)利瑪竇李之藻演.

圜容較義前有萬歷四十二年(1614)李之藻(…1631)序，稱戊申(1609)十一月畢圜容較義一書.

錢曾也是園藏書目卷第五作利瑪竇圜容較義一卷.

同文算指前編二卷，通編八卷，利瑪竇授.李之藻譯.

(註12) 印光任，張汝霖澳門記略卷下第四十五頁，光緒庚辰(1880)江寧藩署重刻.

(註13) 利瑪竇幾何原本序，幷徐光啓題幾何原本再校本.

前編有萬歷癸丑(1613)李之藻序, 及萬歷甲寅(1614)徐光啟序. 按利瑪竇卒於萬歷三十八年(1610)四月.(註 14)

則此書爲卒去前所授矣.

邵亭書目姚若有鈔本. 後多一卷.

測量法義無卷數, 利瑪竇譯, 徐光啟受.

按利瑪竇卒於萬歷三十八年(1610)四月, 則此書爲卒去前所譯矣.

也是園藏書目卷第五作利瑪竇測量法義一卷.

測量異同無卷數. 徐光啟撰.

李之藻刻測量異同於天學初函中. 之藻以崇禎四年(1631)卒, 則此書成於崇禎初年矣.

幾何體論一卷, 三十五葉, 幾何用法一卷, 四十八葉, 孫元化撰.

豐順丁氏持靜齋書目有幾何體論一卷, 卷後有慶餘心齋諸印. 又有幾何用法一卷, 卷後題道光己酉春, 烏程程慶餘校讀一過. 又有慶餘疇人子弟

(註 14) 明史卷三二六, 外國七.

諸印.

「孫元化嘉定人,字初陽,天啟舉人.從徐光啟游.得西洋火器法.崇禎初起兵部員外郎.以孔有德變,棄市.」見中國人名辭典第七五〇頁.

按徐光啟句股義稱;「句股自相乘,以至容方,容圓,各和,各較相求者,舊九章中亦有之,第能言其法,不能言其義也.所立諸法,蕪陋不堪讀,門人孫初陽氏刪為正法十五條,稍簡明矣.余因為論譔其義.」是孫元化曾立句股正法十五條,而徐光啟為之論撰成句股義也.

泰西算要一卷,孫元化撰

見曾遠榮中國算學書目彙編增補.(註15)

句股義無卷數,徐光啟撰.

李之藻刻句股義於天學初函中.之藻以崇禎四年(1632)卒,則此書成於崇禎初年矣.

度測三卷,附開方號一卷,度算解一卷,陳藎謨撰.

陳藎謨字獻可,號嘯庵,嘉興人,所著書大抵以西

(註15) 清華學報第三卷第一期.

人之說，傅合古義，其太極率令 $\pi=3.15265$，語見阮元疇人傳卷三十三.

中西數學圖說十卷，崇禎四年(1631)?，李篤培撰.

民國十一年(1922)山東歷史博物展覽會報告書載該會展覽品，有鈔本中西數學圖說十二册，爲明季李篤培所撰. 李字汝植號仁宇，山東招遠人，萬歷己酉(1609)亞魁，庚戌(1610)會魁，任工部主事，生於萬歷三年(1575)十月，卒崇禎四年(1631)十一月.(註 16) 據報告書云「明季西人利瑪竇來華，帶有西國算書，李氏閱之，悉以中法演出，所有一切方法，分類納之九章之中. 其所用之法，并有中西所無者，推類以充其極，著之各章之中，世徒知有徐光啟輩，而先生反湮沒不彰，豈非有幸有不幸歟」.(註 17)

按原書十二册；卷一方田，形積相求補. 卷二方田，畝法，卷三粟布，分；單准，纍准，變准，重准，成立法，斤兩法，年月法，盤查法八篇. 卷四衰分，分；合率衰分，等率衰分，照本衰分，貴賤衰分，子母衰分，匿價衰分，維和衰分，借徵法八篇卷五少廣，分六篇. 卷六商功，分；

(註 16) 據山東招遠縣李氏家乘，及招遠縣志，「人物別傳」.

(註 17) 山東歷史博物展覽會報告書第二編第五十六頁.

修築,高廣變法,開濬;課工,料計,推步,歷法,聲律,八篇.卷七均輸,分;定賦役,計蹤里,均法,加法四篇.卷八盈朒,分盈不足,兩盈兩不足,盈足朒足,開方盈朒,子母盈朒,借徵盈朒六篇.卷九方程,分二種方程,多種方程正負方程,子母方程,較方程,等方程六篇.卷十句股,分;句股相求,句股和較,句股容,句股測,鏡測法,尺測法,知方之術七篇.鶴培卒於崇禎四年,而書中有崇禎三年之語,則此書蓋其絕筆也.

算集□卷,廣西全州宋卿陳邦備撰.

見曾遠榮中國算學書目彙編增補.

以上所記,大抵已知撰人姓氏及其時代者,其未記時代或撰人姓氏者.有,

算法大全□卷,都察院刻.

算法□卷,南京國子監刻

九章算法□卷,南京國子監刻.

見明黃弘祖古今書刻.(註 18) 按弘祖,明嘉靖三十八年(1559)進士.

算法二卷.

(註 18) 光緒丙午(1906)長沙葉氏觀古堂刻本.

見重刻明南雍經籍攷卷下.(註 19)

金蟬脫殼,縱橫算法一卷,不知作者.

見明高儒百川書志第十一卷第五頁,葉氏觀古堂刻本.

按程大位算法統宗卷十三,有金蟬脫殼及縱橫算法,則此書之出,在萬歷二十一年(1593)前矣.

算法通纂一本.

百家纂證一本.

九章詳註比類均輸算法大全六本.

見脈望館書目第二册第四十二頁,涵芬樓秘笈第六集本.按玉簡齋叢書二集本脈望館書目作算法通纂一本,百家算譜一本,九章詳解比類均輸算法大全六本.

開平方訣一本.

見四明天一閣藏書目錄律字號廚,第五十二頁,玉簡齋叢書二集本.按明刻本周髀算經附有開平方訣一頁,未知是否出於此書.

句股索隱□卷.

(註 19) 光緒壬寅(1902)長沙葉氏校刊本卷下,第三十二頁.

明崇禎曆書本測量全義一卷二十四頁稱:「又問設兩邊總之較,問各邊若干.此測量不常用,見句股索隱」.未知此書世有傳本否.

此外之見於叢書者,明初有永樂大典.清人戴震(1724-1777)曾於此中集出或校補下列各算經:

周髀算經二卷,音義二卷.據大典本補正.

九章算術九卷.大典本.

孫子算經三卷.據大典本校正.

海島算經一卷.大典本.

五曹算經五卷.據大典本校補.

夏侯陽算經三卷.大典本.

五經算術五卷.大典本.

由武英殿聚珍版印行.(註20) 其採輯而未印行者,又有

益古演段三卷,元李治撰.

原本革象新書五卷,元趙友欽撰.

數學九章十八卷,宋秦九韶撰.

此書又有趙琦美,萬歷四十五年(1617)傳鈔本

(註20) 彙刻書目第五册第五頁,翻刻光緒十二年(1886)本,或朱記榮行素堂目睹書錄一編,第五十二頁,光緒甲申(1884)家刻本.

一種.(註 21)

永樂大典遺篇尚有流傳海外者. 英劍橋大學藏卷一六三四三之一六三四四, 十翰, 算法十四之十五. 爲「異乘同除」,「少廣」兩節. 其所引算書有; 九章算經, 孫子算經, 五經算術, 五曹算經, 夏侯陽算經, 秦九韶數學九章, 楊輝摘奇算法, 楊輝詳解算法, 楊輝日用算法, 楊輝纂類, 透簾細草, 錦囊啟蒙, 丁巨算法, 賈通全能集, 詳明算法, 嚴恭通原算法.

明末所修崇禎歷書, 關於算法者, 又有

割圜八線立成長表四卷.

大測二卷, 崇禎四年(1631)正月徐光啟等進呈.

割圜八線表六卷, 崇禎四年正月徐光啟等進呈.

測量全義十卷, 崇禎四年八月徐光啟等進呈.

比例規解一卷, 崇禎四年八月徐光啟等進呈.

其附見於個人集部者, 則

句股測望論, 句股容方圓論, 弧矢論, 分法論, 六分論, 無卷數, 唐順之撰.

(註 21) 數書九章跋及札記序, 宜稼堂叢書本.

見於荆川文集.按唐順之(1507－1560)字應得,號荆川,武進人.其所論箸,并爲周述學,程大位所引用.

算學新說上下二卷,附周徑篇,朱載堉撰.

見於樂律全書.

周髀算經圖解一卷,朱載堉撰.

見於嘉量算經.

按朱載堉(1536－?)字伯勤,號句曲山人,鄭恭王厚烷世子.明神宗十九年(1589)恭王薨,讓爵於孟津王之子見淴.載堉明曉天算,神宗二十三年(1595)進樂律全書,及聖壽萬年歷.以$\pi=\frac{\sqrt{2}}{0.45}$.萬歷庚戌(1610)成嘉量算經三卷.見明史「諸王傳」,樂律全書,人海記,及阮元四庫未收書目提要.

明清之際西算輸入中國年表

目　次

1. 通論

明初因授時歷而作大統歷,行之二百年,違天失時,其事漸著.邢雲路,魏文魁,宋仲福,朱載堉之徒,類能言之.顧其時算數之術,亦不昌明,宋元諸子,所遺之天元一術,已無人或曉,以是雖屬有志,而改作無由.利瑪竇則適於萬歷辛巳(1581)來華,初亦不為人重,及舉示其歷算學說,始為世崇,并獲入都覲見.在野則與徐光啟譯幾何原本前六卷(1606),是為西算輸入中國之初步.前後并授李之藻,徐光啟以算術;計有同文算指,圜容較義,測量法義,而徐光啟因亦有測量異同,句股義之作.此外傳其法者,尚大有人.至利瑪竇萬歷庚戌(1610)卒去後,西士來者漸衆,如艾儒略,

龐迪我,熊三拔,陽瑪諾等,并通歷算,且各有譯述.迄萬曆壬子(1612)以降,周子愚,李之藻輩,并以舊歷不合,議請設局修改未果,直至崇禎己巳(1629)始實行以徐光啟督修歷法,西洋人入局者,有龍華民,鄧玉函.翌年(1630)鄧玉函卒,繼入者爲湯若望,羅雅各.如是辛未(1631)進歷書二次;第一次二十四卷,第二次二十卷并一摺.壬申(1632)三次進書三十卷.次年徐光啟卒去,遺摺舉李天經自代.時則歷書大體已具,而算學中之割圓術,三角術及三角函數表,幾何畫法,比例規,籌算,并從歷書中附帶輸入矣.李天經繼任後,於甲戌(1634)進歷書二次;第四次二十九卷一架,第五次三十二卷,前後五次共一百三十七卷.自後逐年進七政經緯新歷,其監局官生與其事者五六十人,可謂盛矣.而舊派中冷守中,魏文魁則於徐光啟未卒時已倡言反對,光啟卒後,其勢更張,卒以魏文魁爲東局,與新法之西局,并大統,回回爲四家.其後雖新法測驗獨合,明廷亦加禮西局修歷官生,而新法迄明亡(1644)終未實行也.

明亡後,湯若望即與清廷接洽修歷,頗爲清世祖所重,遂以湯若望掌管欽天監印信,順治乙酉(1645)

修補曆書得一百卷.其時待遇之隆,爲前此所未有,如是者十有五年.同時穆尼閣居南京,以對數之說授薛鳳祚,是爲對數輸入中國之始.至順治末年(1659-61)楊光先肆力反對新法.清聖祖初即位,便興大獄,廢新法,囚教徒,殺官生五人,以楊光先繼湯若望.康熙丙午(1666)湯若望卒後,南懷仁起劾舊法之誤,於是復行新曆,繼起反對,若楊燝者,幷得罪而去.而南懷仁新法,由監局官生肄習,永遠遵行焉.顧此時朝野亦知算數之宜重,故杜知耕,李子金,梅文鼎(1633-1721),陳訏(1650-1732),黃百家,梅瑴成(1681-1761)輩,幷以整理西算爲志.聖祖亦留心曆算,其先後入宮教授者,西洋人有南懷仁,張誠,Thomas,白晉,巴多明,杜德美等,故聖祖亦深明算數,有律曆淵源(1723刻)之作.而代數學,及割圓術中解析術,幷於此時輸入焉.明末西人之入華者,向受限制,厥後此禁雖時申時弛,而曆算之借重也如故.及康熙乙酉(1705)羅馬教王遣使來華,宣教師自起內訌,其勢始衰.繼起之戴進賢尙修有曆象攷成後編十卷(1742成書),而後此則無聞人.雖乾隆己丑(1769)尙有服官欽天監者,亦碌碌無所建樹矣.

2. 年表

明萬曆九年辛巳(1581)「萬曆九年,利瑪竇(Ricci, Matteo, 意大利人, 1552–1610)始汎海九萬里,抵廣州之香山澳.」〔見明史卷三二六,「外國七」.〕

「利瑪竇入中國,係萬曆九年.」〔見不得已辯.〕(註1)

「萬曆九年,利瑪竇始汎海九萬里,抵廣州之香山澳,漸入南京,倡行天主教.」〔見清印光任,張汝霖;澳門記略,卷下,第一五頁.〕(註2)

「利瑪竇生於馬塞拉台(Macerata)時在 March of Amona, 1552 年. 以 1571 年進耶穌會(Jusuit society), 其後至印度, 1578 年至臥亞, 轉至澳門, 1610 年西五月十一日卒.」〔見 Biog. universalle 內 Remusat 條.〕

利瑪竇來華之年,明史,不得已辯,澳門記略,并稱萬曆九年(1581)來華. 而 Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I. p. 304 (1923) 據 Pietro Tacchi Venturi, S. J., L'Apostolato del p. Matteo Ricci, 2d ed , Rome, 1910. 則

(註1) 此書題利類思(Buglio, Louis, 意大利人,—— 1684)著,閩會安文思(Magalhaes Gabriel. de 葡萄牙人, —— 1677),南懷仁(Verbiest, Ferdinand, 比利時人, 1623–1688)訂.

(註2) 光緒庚辰(1880),江寧藩署重刻本.

謂利瑪竇以萬曆六年戊寅(1578)至廣東.又次條謂「西一千五百八十二年來華」.又增訂徐文定集卷首下第九頁「利子碑記」謂「萬曆庚辰(1580)航海九萬里觀光中國」并屬誤記.

按利瑪竇於萬曆二十八年十二月二十四日(1601)上疏明廷謂(由1578至1581)航海而來時歷三年(由1581至1596);淹留肇慶,韶州二府十五年(由1596至1601),越(庾)嶺由江西至南京又淹留五年.〔見增訂徐文定公集卷首下行,實第七頁,上海慈母堂宣統元年(1909)印.〕由上利瑪竇上疏之文逆推,蓋當以萬曆九年(1581)來華為可信.

萬曆十年壬午(1582)「西1582年,即明萬曆十年天主教皇各里各里第十三欲傳教中華,乃派駐印度神父意大里人改轍來華;一名羅其里,一名利瑪竇,習學華語華文.初至粵無與居者,久謀不獲,轉之廈,亦多艱苦,設法久耐,居華之路始開.」〔見「利瑪竇湯若望二君傳略」,格致彙編第五年,冬季册,西歷1890年,冬季出版.〕

「利瑪竇由澳門轉入八閩,至金陵,出其渾天儀,量天尺,句股舉重算法,留都臺省.」〔見澳門記略卷

下，第四五頁.〕

萬曆二十二年甲午(1594) 明朱仲福撰折衷歷法十三卷.〔見四庫全書總目卷一〇七.〕

萬曆二十三年己未(1595) 明朱載堉進聖壽萬年歷八卷，附律歷融通四卷.疏稱:「授時,大統二歷,攷古則氣差三日,推今則時差九刻,……」〔見四庫全書總目卷一〇六.〕

萬曆二十五年丁酉(1597) 是年楊光先生.按楊光先字長公,歙縣人,康熙三年(1664)上請誅邪教狀,時年六十八歲,著不得已上下卷.〔見不得已,李儼藏傳鈔本.〕

是年徐光啓至南京遇利瑪竇〔見增訂徐文定公集卷首下行實第三頁.〕

萬曆二十八年庚子(1600)「庚子(利瑪)竇因貢獻,僑邸燕臺.」〔見利瑪竇幾何原本序.〕

萬曆二十八年十二月二十四日利瑪竇上奏疏.〔見增訂徐文定公集卷首下行實第八頁.〕

萬曆二十九年辛丑(1601)「利瑪竇……二十九年入京師,中官馬堂以其方物進獻,自稱大西洋人.」〔見明史卷三二六,「外國七」.〕

「(利)西泰同龐子迪我號順陽者…迺越黃河,抵臨清,督稅宮官馬堂持其貢表恭獻闕廷.」〔見增訂徐文定公集卷首下行實第十頁.〕

「利瑪竇…至二十九年入京師,獻方物,自稱大西洋人,…而帝嘉其遠來,假館授粲,給賜優厚,利瑪竇安之,遂留居不去.」〔見澳門記略下卷第一六頁.〕

萬曆三十年壬寅(1602)「接踵而至者…福州府,艾儒略(Aleri, Jules, 意大利人,—— 1649),壬寅.」〔見不得已辯.〕

明史艾儒略作艾如略.〔見明史卷三二六.〕

是年利瑪竇成世界坤輿全圖六幅,有李之藻,祁光宗等跋語.(註3)

萬曆三十一年癸卯(1603)「癸卯秋徐光啓至南京由羅如望爲行洗禮,加名保祿.」〔見增訂徐文定公集卷首下行實第六頁.〕

「癸卯冬則吳下徐太史(光啓)先生來,先生既自精心長於文筆,與旅人輩交遊頗久,私計得對譯(幾何原本)成書,不難於時以計偕至,及春薦南宮選爲

(註3) 見史地學報第二卷第五期內「史地界消息」,第八頁.

廣常,然方讀中秘書,時得晤言,多咨論天主大道,以修身昭事爲急,未遑此士苴之業也.」〔見利瑪竇:幾何原本序.〕

萬曆三十四年丙午(1606) 是年秋利瑪竇與徐光啓共譯幾何原本前六卷,明年春獲卒業.〔見利瑪竇:幾何原本序.〕

萬曆三十五年丁未(1607) 是年春利瑪竇與徐光啓共譯成幾何原本前六卷,并在京出板,板留京師.〔見利瑪竇:幾何原本序,并徐光啓題幾何原本再校本.〕

萬曆三十六年戊申(1608) 徐光啓題幾何原本,再校本稱:「戊申春利先生以校正本見寄,令南方有好事者重刻之,累年來竟無有,校本留置家塾.」

利瑪竇在幾何原本譯成之前後.嘗自著乾坤體義二卷,下卷言數:「以邊線,面積,平圜,橢圜互相容較.」〔見四庫全書總目卷一〇六.〕其授於李之藻,徐光啓者;圜容較義題利瑪竇授,李之藻演,測量法義題利瑪竇口譯,徐光啓筆受.又同文算指前篇二卷,通編八卷,題利瑪竇授李之藻演.

明邢雲路撰戊申立春攷證一卷.〔見四庫全書

總目卷一〇七.〕按雲路,萬曆庚辰(1580)進士,曾撰古今律歷攷七十二卷.〔見四庫全書總目卷一〇六.〕魏文魁實助成之.

萬曆三十八年庚戌(1610) 是年徐光啓北上,利瑪竇已沒.〔見徐光啓題幾何原本再校本.〕

利瑪竇於是年四月卒於京,葬西郭外.其年十一月朔日食,歷官推算多謬,朝議將修改.〔見明史卷三二六「外國七」.〕

「三十八年四月卒於京,賜葬西郭外,今阜城門外有利泰西墓云.」〔見澳門記略卷下第一六頁.〕

「(利瑪竇)賜葬燕中,仍詔聽其同學二三君子依止焚脩.」〔見簡平儀;徐光啓序.〕

是年三月十八日利瑪竇卒.〔見增訂徐文定公集卷首下行實第九頁.〕

利瑪竇以1552年西曆十月六日生於馬塞拉台(Macerata),1610年西曆五月八日(或十一日)卒於北京.〔見 Bosmans, H., Revue des Quest. Scient., January, 1921.〕

「查利瑪竇優卹原疏係萬曆三十八年四月二十三日本(禮)部署部事左侍郎吳道南,主客司郎中林茂槐等題給葬地.奉旨是隨經署府事府丞黃吉士

查給阜城門外二里溝,籍沒私刱佛寺三十八間,地基二十畝,付賨塋葬.」〔見西洋新法歷書「奏疏」第三〇七,三〇八頁.(註4) 及增訂徐文定公集卷首下行實第十頁.〕

「(利瑪竇)徒龐迪我(Pantoja, Diego de, 西班牙人, ?–1618)等咨送入京,不果用,而利瑪竇卒.」〔見澳門記略卷下,第四五頁.〕

明史稱龐迪我,依西把尼亞人.〔見明史卷三二六.〕

萬曆三十九年辛亥(1611) 是年都中方爭論歷法,徐光啓與龐迪我,熊三拔(Ursis, Sabtthinus de, 意大利人,?—1620)重閱利瑪竇校正本幾何原本.〔見徐光啓題幾何原本再校本.〕

是年周子愚言大西洋歸化人龐迪我,熊三拔等深明歷法,其所携書有中國載籍所未及者,當令譯上,以資採擇.」〔見明史卷三二六.〕

明史稱;熊三拔,意大里亞國人.〔見明史卷三二六.〕

(註4) 北京大學圖書部藏明刻清修本. 下同.

萬曆四十年壬子(1612) 萬曆四十年監正周子愚建議參用西法修歷.〔見西洋新法歷書「題疏」,第一六頁.〕

萬曆四十年十一月朔日食,欽天監推算得未正一刻初虧,而兵部員外部范守己候得申初一刻,則是先天四刻,禮部於十二月議請改歷.〔見西洋新法歷書「題疏」,第一一及一二頁.〕

是年王英明撰歷體略三卷.「英明字子晦,開州人,萬曆丙午(1606)舉人,是編成於萬曆壬午,……其上中二卷,所講中法,亦皆與西法相脗合,蓋是時徐光啓新法算書尚未出,而利瑪竇先至中國,業有傳其說者,故英明陰用之耳.……」〔見四庫全書總目卷一〇六.〕

萬曆四十一年癸丑(1613) 是年李之藻序同文算指又序圜容較義.

是年熊三拔著簡平儀.

萬曆四十一年正月十五日月食不合,禮部又覆請改歷.〔見西洋新法歷書「題疏」,第一〇頁.〕

是年李之藻奏上西洋天文學說十四事,又請亟開館局,繙譯西法.〔見明史紀事本末第七三卷.〕

萬曆四十二年甲寅(1614) 是年徐光啓序同文算指.

是年熊三拔撰表度說一卷.〔見四庫全書總目卷一〇六.〕

萬曆四十三年乙卯(1615) 是年西洋人陽瑪諾(Diaz, Emmanuel jeune, 葡萄牙人, ?…… 1659) 撰天問略一卷.〔見四庫全書總目卷一〇六.〕

萬曆四十四年丙辰(1616) 徐如珂與晏文輝合疏請逐天主教徒,至十二月令王豐肅 (Vagnoni, Alfonso, 意大利人 ?—1640), 龐迪我等俱赴廣東,令下未行,所司亦不爲督發.〔見明史卷三二六,及明紀第四卷.〕

萬曆四十六年戊午(1618) 是年龐迪我上表乞寬假,不報,怏怏而去,而南都之行教如故.〔見明史卷三二六.〕

崇禎元年戊辰(1628) 是年王錫闡生.〔見陸心源:三續疑年錄,第八卷補遺.〕

崇禎二年己巳(1629) 崇禎二年五月初一日日食,禮部於四月二十九日揭三家豫算日食.三家者:大統歷,回回歷,新法也.至期驗之,光啓推算爲合.〔見

西洋新法歷書「閣題」第三頁,「揭貼」第四及五頁.〕

「崇禎二年五月乙酉朔日食,禮部侍郎徐光啓依西法推分數,與大統,回回所推互異,已而光啓法驗,餘皆疎.禮部侍郎翁正春因請倣洪武初設回回科之例,令(龐)迪我等同測驗,從之.開局於首善書院,以光啓督之.光啓因舉李之藻,西洋人龍華民(Longobardi, Nicolas, 意大利人, 1565–1654), 鄧玉函(Terenz, Jean, 日耳曼人, ?--1630).」〔見澳門記略卷下,第四六頁.〕

崇禎二年七月十一日禮部題疏稱四十等年原疏推舉五人,爲:史臣徐光啓,臬臣邢雲路,部臣范守己崔儒秀,李之藻.今徐光啓在禮部,李之藻以南京太僕寺少卿丁憂服滿在籍.同月十四日如議修改歷法,以徐光啓督修一切,幷起用李之藻.〔見西洋新法歷書「題疏」第一四及一九頁.〕

是年七月二十一日禮部請頒「督修歷法關防」許之.〔見西洋新法歷書「題疏」第二〇及二一頁.〕

是年七月二十六日徐光啓上書陳修歷急要事宜四款,分三十三條,計歷法修正十條,修歷用人三條內舉龍華民,鄧玉函,急用儀象十條,度數勞通十條.〔見西洋新法歷書「奏疏」,第二八…三七頁.〕

「崇禎二年七月徐光啓薦鄧玉函同修歷法，鄧玉函者,德國之干司但司人也.…由澳門入華,因精醫,人皆敬之,旣入局,翻譯諸術表草稿八卷.」〔見「利瑪竇湯若望二君傳略」,格致彙編第五年,冬季册,西歷一八九〇年,冬季出版.〕

明史稱鄧玉函,熱而瑪尼亞國人.〔見明史卷三二六.〕

崇禎二年九月勅諭徐光啓修歷法.〔見西洋新法歷書「勅諭」,第二頁.〕

湯若望(Schall Von Bell, Johann-Adam, 日耳曼人,1591–1666),自言崇禎二年己巳入北京.〔見王先謙:東華錄「順治二」及西洋新法歷書「新法表異」卷上,第三二頁.〕惟據後條,則以崇禎三年入京爲可信也.「湯若望者日耳曼之哥倫人也.精歷法,通格致.明崇禎二年入中國習華文.時禮部奏請開局修改歷法,徵若望供事數年,勤勞局事.著交食諸書數種,經徐光啓,李天經前後進呈,名聞於朝.」〔見「利瑪竇湯若望二君傳略」,格致彙編第五年,冬季册.西歷一八九〇年,冬季出版.〕

崇禎三年庚午(1630) 是年三月十一日徐光啓

上言論四川得資縣生員冷守中論曆之誤.〔見西洋新法歷書,「學歷小辨」第二五…二七頁.〕

崇禎三年四月初二日鄧玉函卒.五月十六日徐光啓薦湯若望.羅雅谷(Rho, Giacomo,意大利人, 1593-1638)入京修歷.〔見西洋新法歷書「題疏」,第四五頁.〕

「(鄧)玉函卒又徵西洋人湯若望,羅雅谷譯書演算.」〔見明史卷三一,「志第七」,及澳門記略卷下,第四六頁.〕

是年七月初二羅雅谷由河南開封府來京,同月初六日入局.〔見西洋新法歷書「題疏」,第四七及三一七頁.〕

是年仲秋羅雅谷自識所著比例規解,謂昔在上海,曾爲徐宗伯造其尺,而未暇譯書.〔見西洋新法歷書,「比例規解」.〕

是年秋李之藻卒.〔見西洋新法歷書「題疏」,第五七頁.〕

是年十二月湯若望以徐光啓薦由陝西西安府來京,同月初二日入局.〔見西洋新法歷書「題疏」,第四七及三一七頁.〕

崇禎四年辛未(1631) 崇禎四年春正月二十八

日徐光啓第一次進歷書一套共六卷,內歷書總目一卷,日躔歷指一卷,測天約說二卷,大測二卷.歷表一套共一十八卷,內:日躔表二卷,割圓八線表六卷,黃赤升度表七卷,黃赤道距度表一卷,通率表一卷.前後共二十四卷.(註5)〔見西洋新法歷書「題疏」第五八及五九頁.〕

「先是明季壬戌(1622)年開局改歷法,閱十年而湯若望自陝西西安府天主堂行教,以崇禎四年辛未(1631)欽取進京.」〔見不得已辯.〕與前記庚午入京之說互異.

崇禎四年辛未仲春,陸安鄭洪猷序幾何要法四卷,書題泰西艾儒略口述,海虞瞿式穀筆受,古閩葉益蕃參校,吳淞陳于階,陸安鄭洪猷,山陰陳應登同校梓.

是年保定府滿城縣玉山布衣魏文魁遣子象乾上歷元,六月初一日又咨禮部陳前事,并上歷測,歷元二書,辯論歷法.〔見西洋新法歷書,「學歷小辯」.〕

是年八月初一日徐光啟第二次進測量全義十

(註5) 明史卷三一,及明史稿第九册并作二十四卷,明史紀事本末作二十二卷誤.

卷,恆星歷指三卷,恆星歷表四卷,恆星總圖一摺,恆星圖像一卷,揆日解訂訛一卷,比例規解一卷,共二十卷并一摺.(註6)〔見西洋新法歷書,「題疏」第六一及六二頁.〕

是年八月二十八日冷守中勘四月十五日月食不合.〔見西洋新法歷書,「學歷小辯」第二八……三〇頁.〕

是年十一月二十二日李篤培卒.篤培字汝植,招遠人,著中西數學圖說十二册多介紹西說.

崇禎五年壬申(1632) 是年四月初四日徐光啟第三次進月離歷指四卷,月離歷表六卷,(已上係羅雅谷譯譔),交食歷指四卷,交食歷表二卷,(已上係湯若望譯譔),南北高弧表一十二卷,諸方半晝分表一卷,諸方晨昏分表一卷,(已上係羅雅谷,湯若望指授,監局官生推算),共爲三十卷.(註7)〔見西洋新法歷書,「題疏」第八〇及八一頁.〕

(註6) 明史卷三一及續文獻通攷第二〇〇卷并稱二十一卷,蓋一摺亦稱卷也.

(註7) 關於梅文鼎事蹟,參看李儼:「梅文鼎年譜」,見清華學報第二卷第二期,民國一四年一二月,北京清華學校出版.

是年十月十一日徐光啟疏薦山東巡撫朱大典,陝西按察使李天經,原任監察御史金聲,原任大理寺評事王應遴,通歷法.〔見西洋新法歷書,「題疏」第九八及九九頁.〕

崇禎六年癸酉(1633) 是年二月初七日梅文鼎生.

是年徐光啟卒,年七十二.〔見錢大昕:疑年錄,第三卷.〕

「六年十月光啟卒,以山東參政李天經代之.」〔見澳門記略卷下第四六頁.〕

「徐光啟生嘉靖壬戌三月二十一日,卒崇禎癸酉十月初七日.」〔見增訂徐文定公集卷首上年譜第六頁.〕

「所纂歷書將百卷.」〔見明史紀事本末第七三卷.〕

崇禎七年甲戌(1634) 是年七月十九日李天經第四次進五緯總論一卷,日躔增一卷,五星圖一卷,日躔表一卷,火木土二百恆年表并周歲時刻表共三卷,(已上係羅雅谷譯譔),交食歷指三卷,交食諸表用法二卷,交食表四卷,(已上係湯若望譯譔),黃平象限表共七卷,木土加減表二卷,交食簡法表二卷,方根

表二卷,(已上係羅雅谷,湯若望指授,監局官生推算),恆星屏障一架(係湯若望製),共二十九卷一架.(註8)〔見西洋新法歷書,「奏疏」第一二六頁.〕

是年十二月李天經第五次進五緯曆指共八卷,五緯用法一卷,日躔攷共二卷,夜中測時一卷,(已上係羅雅谷譯譔),交食蒙求一卷,古今交食攷一卷,恆星出沒表共二卷,(已上係湯若望譯譔),高弧表五卷,五緯諸表共九卷,甲戌乙亥日躔細行二卷,(已上係羅雅谷湯若望指授,監局官生推算),共三十二卷,(註9)前後五次所進共一百三十七卷,(內有一摺一架亦稱卷,故云),崇禎曆書至是告成.〔見西洋新法歷書,「題疏」第一五七,一五八頁.〕

是時幷將所修曆書付梓,今明刻本題有「明工部虞衡淸吏司郎中楊惟一梓」是也.

是年魏文魁上言曆官所推交食節氣皆非是,於是命魏文魁入京測驗,立西洋爲西局,文魁爲東局,

(註8) 明史卷三一,明史稿第九册,澳門記略卷下,幷作二十九卷,明史紀事本末第三七卷作二十七卷誤.

(註9) 明史卷三一,作三十二卷,明史稿第九册,作三十卷誤.

合大統回回凡四家.〔見明史卷三一.〕

崇禎八年乙亥(1635) 八年李天經又上曆法條議二十六則,是時西法書器俱完.〔見明史卷三一.〕

是年四年李天經進乙亥丙子七政行度四册,又參訂曆法條議二十六則.〔見西洋新法歷書,「題疏」第一七四……一八五頁.〕

崇禎九年丙子(1636)「九年正月十五日辛酉曉望月食,天經及大統,回回,東局,各預推虧,圓,食,甚,分秒時刻.…… 其日天經與羅雅谷,湯若望,大理評事王應遴,禮臣李焻,及監局守登文魁等赴臺測驗,惟天經所推獨合.」〔見明史卷三一,澳門記略卷下第四七頁〕

是年四月二十八日李天經進渾儀書四卷一套,運重圖說一册,渾天儀一具并盔星球一具并盔,牙晷二具各有盔,運重一具.〔見西洋新法歷書,「題疏」第二四四頁.〕

渾天儀說四卷,題湯若望譔,龍華民,羅雅谷訂,前有李天經序文.

崇禎十年丁丑(1637)「十年正月辛丑朔日食,各局預推如前食時,亦惟天經爲密.」〔見澳門記略卷下

第四七頁.〕

是年十二月進崇禎戊寅年七政經緯新曆各一冊.〔見西洋新法歷書,「題疏」第二九三頁.〕

崇禎十一年戊寅(1638)「是年正月詔仍行大統曆,旁求參考西法,與回回科并存.」〔見明史卷三一,澳門記略,卷下第四七頁.〕

是年三月十三日羅雅谷卒.(註 10)〔見西洋新法歷書,「題疏」第三〇四頁.〕

是年八月進李天經光祿寺卿,仍管曆務.〔見明史卷三一.〕

是年十一月監局官生:楊之華,黃宏憲,朱國壽,祝懋元,王應遴,張寀臣,朱光大,朱光燦,周士昌,朱廷樞,王觀曉,各進敍有差.〔見西洋新法歷書,「奏疏」第三二二…三二六頁〕

是年十二月進崇禎己卯年七政經緯新曆一套.〔見西洋新法歷書,「奏疏」第三三〇頁.〕

崇禎十二年己卯(1639) 是年十一月李天經進黃赤全儀用法一冊.〔見西洋新法歷書,「奏疏」第三四

(註 10)「利瑪竇湯若望二君傳略」,格致彙編(一八九〇)稱:「崇禎九年三月(羅雅谷)卒,歷法全歸(湯)若望推步」者誤.

四頁.〕

是年十二月李天經進庚辰年七政經緯新曆各一册.〔見西洋新法曆書,「奏疏」第三四七頁.〕

崇禎十三年庚辰(1640) 是年十二月李天經進辛巳七政經緯新曆各一册.〔見西洋新法曆書「奏疏」第三五七…三五九頁.〕

是年禁西洋人入廣東省.(註 11)

崇禎十四年辛巳(1641) 是年十二月李天經進壬午七政經緯新曆各一册.〔見西洋新法曆書「奏疏」第三九五…三九七頁.〕

是年李天經上言大統置閏之誤.〔見明史卷三一.〕

崇禎十五年壬午(1642) 是年十二月李天經進癸未七政經緯新曆各一册.〔見西洋新法曆書「奏疏」第三九九頁.〕

明崇禎十六年癸未(1643)「十六年三月乙丑朔日食,測又獨驗.八月詔西法果密,卽改大統曆法,通行天下,未幾國變.〔見明史卷三一及澳門記略卷下,第四六頁.〕

(註 11) 參看順治四年條.

是年十月以禮部奏疏，加給湯若望酒飯卓面半張，幷優䘏王應遴，其欽天監秋官正劉有慶，中官正賈良琦，曆局供事；光祿寺署正黃宏憲，上林苑監丞陳亮采，經曆朱光大，博士朱光樞，王觀曉，周士昌，朱光顯，宋發各以原官加一級.〔見西洋新法歷書，「奏疏」第四〇八…四一一頁.〕

清順治元年甲申(1644) 是年正月明思宗賜湯若望「旌忠」，「崇義」扁額各一方.〔見西洋新法歷書，「奏疏」第四一二頁.〕

是年正月李天經進甲申七政經緯新曆各一册.〔見西洋新法歷書，「奏疏」第四一四頁.〕是年三月明社亡.

是年六月(註 12)「修正曆法西洋人湯若望啓言臣於明崇禎二年(?)來京，曾用西洋新法釐正舊歷，製有測量明晷定時考驗諸器，盡進內廷，用以推測，屢屢密合，近聞諸器盡遭賊毀，臣擬另擬進呈，…….」〔見東華錄，「順治三」，及「利瑪竇湯若望二君傳略」，格致彙編.(1809)〕

(註 12) 格致彙編作「順治二年六月」誤，茲據東華錄正.

是年七月清廷決自明歲順治二年爲始，卽用新曆頒行天下.〔見東華錄,「順治三」.〕

同月「湯若望製就渾天星球一座,地平日晷窺遠鏡各一具,并輿地屏圖.」〔見東華錄,「順治三」.〕

是年(註 13)「八月丙辰朔,日有食之,令大學士馮銓,同湯若望……測驗……惟西洋新法,一一吻合,大統回回兩法,俱差時刻云.」〔見東華錄,「順治三」.〕

湯若望著新法表異亦稱「本(元)年八月一日驗日食時刻分秒方位無差,奉有新法盡善盡美之旨,遂用新法造時憲曆頒行天下.」〔見西洋新法曆書.〕

是年「十月初頒時憲書.」〔見東華錄,「順治三」.〕

是年(註 14)「十一月將欽天監印信著湯若望掌管.所屬該監官員,嗣後一切進曆占候選擇等項,悉聽掌印官舉行.」〔見東華錄,「順治三」.〕

「順治元年甲申十二月初四日戊午，修政曆法遠臣湯若望奏；臣於十一月十五日奏爲恭報月食一疏，奉有欽天監印信著湯若望掌管之旨.臣切念

(註 13) 格致彙編 (1890) 作「順治二年」者誤.

(註 14) 但燾譯日人稻葉君山:清朝全史(漢譯本)第一六五頁作「順治二年」者誤.中華書局,民國三年十二月初版.

歷象授時厥任匪輕,臣何人斯,敢叨斯任乎?伏乞皇上別選賢能管理,庶於大典有光.奉聖旨湯若望著遵旨任事不准辭,該(禮)部知道.」〔見禮曹章奏日錄第一頁.(註15)〕「……初七日修政歷法遠臣湯若望奏:臣奉有欽天監印信著湯若望掌管之旨,隨具疏控辭,奉聖旨湯若望著遵旨任事不准辭,禮部知道欽此.遵臣卽當竭蹶料理印務.然臣終有不安於心者,合無請給臣督理欽天監關防壹顆,或復古太史院敕諭一道,暫爲料理,而該監印信,繳部收貯.庶治歷之責,學道之志,可以幷行而不悖矣.奉聖旨湯若望著遵旨率屬精修歷法,整頓監視,所屬有怠玩侵素的,卽行參奏,敕印不必另給,該(禮)部知道.」〔見禮曹章奏日錄第二及三頁.〕

同月二十一日修政歷法遠臣湯若望奏民歷七政二歷,從來一時幷行,惟今歲適當開國之初,價造不及,以致民歷先頒,七政留後.又因外解歷日錢糧不到,今欲布散,紙張缺乏,合無請旨出示,凡民間用歷者,悉聽該監印刷,每一郡縣,許印百餘本,俟至次年仍聽各省歷日錢糧解部之日給付,本監照例同民

(註15) 見史料叢刻初編,甲子歲東方學會印行,

曆一齊頒布，永爲定規．奉聖旨七政曆著速頒行，禮部知道．」〔見禮曹章奏日錄第八及九頁．〕

同月二十六日修政曆法遠臣湯若望題順治二年乙酉歲所有御覽上吉七政諸種新曆，例應隨本捧進滿洲七政經緯曆一部，七政經緯曆一部，上吉日十三幅，月五星凌犯曆一部，壬遁曆一部．奉旨這曆日留覽，禮部知道．」〔見禮曹章奏日錄第一一頁．〕

「同月二十六日修政曆法遠臣湯若望等題順治二年正月初七日立春．例該差官二員；春官正潘國祥，漏刻博士趙應麒前往順天府，公同該府候驗節氣，謹具題知．奉聖旨知道了，禮部知道．」〔見禮曹章奏日錄第一一頁．〕

「順治元年命用西洋曆法，澳中精於推算者，時時檄取入監．」〔見澳門記略卷下，第一六……一七頁．〕

順治二年乙酉(1645) 是年十一月欽天監監正湯若望，以修補新曆全書告成，恭呈御覽．〔見東華錄「順治五」．〕

「順治元年以西洋新法推算精密，詔用之，二年書成．」〔見澳門記略卷下，第四九頁．〕．四庫全書箸錄作一百卷是也．新法曆書內有籌算一卷，題羅雅谷撰，

湯若望訂.籌算指一卷.題湯若望撰.此所謂籌算,卽訥白爾(Napier, 1550–1617)之訥白爾籌(Napier's Rod),非宋元之籌算也.

新法歷書之成,監局官生與其事者五六十人,計有吳淞.陳于階,燕閩.朱光大,錢塘.黃宏憲,山陰.陳應登,海虞.瞿式穀,陸安.鄭洪猷,古閩.葉益蕃,慈水.周子愚,武林.卓爾康,孫嗣烈,衞斗樞,朱廷樞,掌乘,張寀臣,董思定,焦應旭,祝懋元,周士萃,周士泰,周士昌,陳士蘭,殷鎧,劉有慶,左允和,魏邦綸,鄔明著,賈良琦,潘國祥,楊士華,陳士諫,程廷瑞,李遇春,戈繼文,孫有本,劉蘊德,掌有篆,武之彥,宋可立,戈承科,朱國壽,李華,賈良棟,楊之華,李次虨,王應遴,孟履吉,周胤,鮑英齊,陸昌錄,徐瑛,朱光燦,李祖白,宋可成,宋發,朱光顯,劉有泰等是也.

順治四年丁亥(1647) 兩廣總督佟養甲奏佛朗西人寓居濠鏡澳……應仍照明.崇禎十三年禁其入省之例,止令商人載貨下澳貿易從之.〔見東華錄「順治九」.〕

順治六年己丑(1649) 艾儒略卒.

順治九年壬辰(1652) 是年七月欽天監監正湯

若望進渾天星球地平日晷等儀器,賜朝衣,涼朝帽鞾襪.〔見東華錄,「順治一〇」.〕

順治十年癸巳(1653) 是年三月「賜太常寺卿,管欽天監事湯若望,號通微教師,加俸一倍.」〔見東華錄,「順治二〇」.〕

是年薛鳳祚譯穆尼閣(西名未詳)之比例對數表,是爲對數輸入中國之始.梅文鼎稱:「比例數表者西算之別傳也,……前此無知者,本朝順治間西士穆尼閣以授薛儀甫始有譯本.」是也.〔見比例對數表,及梅文鼎:勿菴歷算書目.〕

順治十一年甲午(1654) 是年龍華民卒.

順治十四年丁酉(1657) 是年四月,七月革職欽天監回回科秋官正吳明烜疏言湯若望所推天象之謬,并上是年回回歷,推算天象之書.請立回回科,以存絕學.同年十二月經實測,明烜所指皆妄.禮部議其罪,援赦獲免.〔見東華錄,「順治二八」,「順治二九」,及清文獻通攷第二五六卷.〕

順治十六年己亥(1659) 是年江南徽州府新安衛官生楊光先(1597—?)作「闢邪論上」,反對天主教.是年五月又作「摘謬十論」并見不得已上卷.

是年湯若望疏薦同會友蘇納.白乃心通歷法.〔見西洋新法歷書「奏疏」,清補頁.〕

順治十七年庚子(1660) 順治十七年十二月初三日,楊光先呈禮部正國禮,未准〔見不得已上卷〕

康熙三年甲辰(1664) 是年薛鳳祚自序天學會通中「舊中法選要」.〔見陸耀:切問齋文鈔,第二四卷,第一五…一六頁.〕(註 16)

是年三月二十五日歙人楊光先上書許青翁侍郎反對天主教.七月二十六日楊光先上請誅邪教狀於禮部.八月初六日會審湯若望等一日.八月初七日,放楊光先寧家.〔見不得已上卷.〕利類思不得已辯(1665)自序稱:「甲辰冬,楊光先著不得已等書,余時方羈絏待罪」.

「康照三年後用舊法,已因舊法不密,用回回法.」〔見澳門記略卷下,第四九頁.〕

康熙四年乙巳(1665) 是年三月因楊光先叩閽進摘謬論具言湯若望新法十謬,又選擇議一篇,摘湯若望選擇之誤.部擬將湯若望,杜如預,楊宏量,李

(註 16) 乾隆四〇年(1775)自序刻本.

祖白，宋可成，宋發，朱光顯，劉有泰，凌遲處死；劉必遠，賈文郁，宋哲，李實，潘盡孝（湯若望義子）斬立決。得旨湯，杜，楊，免死。四月李祖白，宋可成，宋發，朱光顯，劉有泰處斬，其餘議流徙，又赦免。〔見東華錄，「康熙五」。〕

「是年三月大赦，利類思等得離西曹法署。」〔見不得已辯自敍。〕

是年四月楊光先授爲欽天監右監辭職，不准。五月到監供事，同月再辭。六月三辭，同月又辭。始終不准。七月又將張其淳降級爲左監，楊光先補爲監正。李光顯爲右監。八月又有五叩閽辭疏。九月十三日吏部議得已經奉旨楊光先着爲監正，其辭職緣由，相應不准，十四日奉旨，楊光先因知天文衙門一切事務，授爲監正，着卽受職辦事，不得瀆辭。〔見不得已下卷。〕

是年利類思自序不得已辯。此書題極西士利類思著，仝會安文思，南懷仁訂

康熙五年丙午（1666）是年二月欽天監正楊光先奏請採宜陽金門山竹管，上黨羊頭山秬黍，河內葭莩，備制器測候，從之。〔見東華錄「康熙五」。〕

是年湯若望客死京師.〔見清朝全史引.〕順治十七年,及康熙十七年卒去之說皆失之.

湯若望死後,喪儀甚盛.〔見 A. H. Savage-Landor: China and the Allies, vol. II., p. 196, London, 1901.〕

康熙七年戊申(1668) 是年「二月乙酉詔訪求精通天文占候者.」〔見東華錄,「康熙八」.〕

是年八月禮部奏監副吳明烜之七政歷,與天象相近,得旨著吳將康熙八年歷日,七政歷日推算進覽.〔見東華錄,「康熙八」.〕

是年十月由江南取到元郭守敬儀器.〔見東華錄,「康熙八」.〕

是年十二月治理歷法南懷仁劾監副吳明烜推算歷日種種差誤.〔見東華錄,「康熙八」.〕

「七年命大臣傳集西洋人與監官質辯,測驗正午日影.」〔見澳門記略卷下,第四九頁.〕時楊光先尚任監正.〔見東華錄,「康熙八」.〕

康熙八年己酉(1669) 是年二月命大臣二十員赴觀象臺測驗,南懷仁所言逐款皆符,吳明烜所言逐款皆錯.監正馬祜,監副宜喀喇,胡振鉞,李光顯,亦言楊光先所指摘西法之不當.得旨楊光先革職.〔見

東華錄,「康熙九」.〕

八年遣大臣赴觀象臺測驗.遂令西洋人治歷.初書面載「欽天監依西洋新法」字,及是去之.〔見澳門記略卷下,第四九頁.〕蓋是時復行西洋新法也.〔見清文獻通攷第二五六卷.〕

是年「三月授西洋人南懷仁爲欽天監監副.」〔見東華錄,「康熙九」.〕

是年六月「令改造觀象臺儀器,從欽天監監副南懷仁請也.」〔見東華錄,「康熙九」,及清通志,第二三卷.〕

六月部擬吳明烜流徙,得旨免流徙.〔見東華錄,「康熙九」.〕

是年八月欽天監正馬祐遷爲江蘇巡撫.康親王,傑書等議覆南懷仁,李光宏等告楊光先援引吳明烜誣告湯若望,致李祖白等正法呈狀;擬斬楊光先,妻子流徙寧古塔,復湯若望通微教師之名,賜卹,還給建堂基地,許纘曾等復職,西洋人栗安黨等由督撫驛送來京,卹李祖白等,流徙子弟取回,有職者復職.李光宏,黃昌,司爾珪,潘盡孝(湯若望義子)復職.得旨以楊(光先)年老幷妻子免流徙,栗安黨等二

十五人不必來京，天主教則除南懷仁自行外，其餘各省禁立堂入教，餘依議.〔見東華錄，「康熙九」及康熙九九」.〕不久楊光先卒.〔見不得已，錢琦跋.〕

是年八月「追賜原任掌欽天監事，通政使湯若望祭葬」.〔見東華錄，「康熙九」.〕

以李祖白，宋可成，宋發，朱光顯，劉有泰死非其罪，各照原品級給祭銀.〔見東華錄，「康熙九」.〕

是年胡亶撰中星譜一卷，胡在長安，與監中西洋專家反覆辨論，羣皆嘆服.〔見四庫全書總目，卷一〇六.〕

康熙十一年壬子(1672) 是年八月南懷仁，楊燝南互相參告，楊燝南又造眞曆言一書，大學士圖海等以楊不諳飛灰候氣之法，無從測驗．楊交刑部治罪.〔見東華錄，「康熙一二」.〕

是年冬梅文鼎成方程論六卷.〔見李儼：梅文鼎年譜，第六一七頁.〕

康熙十三年甲寅(1674) 「十三年新儀成，凡六：曰黃道經緯儀，曰赤道經緯儀，曰地平經儀，曰地平緯儀，曰紀限儀，曰天體儀.」〔見澳門記略卷下，第四九及五〇頁.〕

是年「二月丁酉欽天監奏欽造儀象告成,進呈靈臺儀象誌.上留覽,加南懷仁太常寺卿銜,仍治理歷法」.〔見東華錄,「康熙一四」.〕

康熙十五年丙辰(1676) 是年五月欽天監治理歷法南懷仁上書論濛氣.〔見東華錄,「康熙一七」.〕

是年李子金成算法通義五卷(1676).其後續成幾何易簡集(1679),天弧象限表(1683).

「李子金原名之鉉,以字行,鹿邑人,柘邑增廣生.……尤精算數.……有隱山鄙事十二種.」〔見蔣炳歸德府志,第二五卷,第一四……一五頁.(註 17)〕

康熙十七年戊午(1678) 是年八月禮部議;欽天監治理歷法南懷仁進康熙永年歷,係接推湯若望所推歷法,應交翰林院,仍著該監官生肄習,永遠遵行,從之.〔見東華錄,「康熙二二」.〕

是年梅文鼎自序所著籌算二卷.〔見梅文鼎年譜,第六二〇頁.〕

康熙二十年辛酉(1681) 是年二月增欽天監滿監副一.〔見東華錄,「康熙二七」.〕

(註 17) 乾隆甲戌(1754)官修刻本.

是年杜知耕成數學鑰六卷(1681).其後續成幾何論約七卷(1700).「杜知耕字端甫,康熙丁卯(1687)舉人……好讀書,尤精數學,著有數學鑰六卷李子金序而傳之」.〔見何燏柘城縣志第一〇卷,第一〇……一一頁.(註 18)〕

康熙二十一年壬戌(1682) 是年王錫闡卒.

康熙二十三年甲子(1684) 是年梅文鼎自序弧三角舉要五卷.

梅文鼎稱:「三角之用,莫妙於弧度.求弧度之法,亦莫良於三角.故測量全義第七,第八,第九卷耑明此理,而舉例不全,且多錯謬.其散見諸曆指者,僅存用數,無從得其端倪.天學會通圜線三角法,作圖草率,往往不與法相應,缺誤處竟若殘碑斷碣,弧三角遂成秘密藏矣……」.〔見勿菴歷算書目,第四八頁.〕梅氏蓋整理當日輸入之西算,陸續著成各書,以便初學.

康熙二十四年乙丑(1685) 是年法皇魯意第十四(Louis XIV)送白晉(Bouvet, Joachim, 1656–1730),張

(註 18) 乾隆三八年(1773)官修刻本.

誠 (Gerbillon Jean Frangois, 1654－1707) 及 Le Comte, de Visdelou, de Fontaney (漢名未詳) 等五人來華.〔見北京政聞報, 第一二五〇頁, (1926). (註 19) 〕魯意第十四又贈清聖祖以地平緯儀. (註 20)

是年西八月七號, 比人 Thomas (漢名未詳, Thomas, Antoine, 1644－1706) 來京, 以南懷仁等之提携, 入宮授帝以實用算術, 幾何, 及儀器用法.〔見北京政聞報, 第一〇一七－一〇一八頁, (1926). (註 21) 〕

康熙二十七年戊辰(1688) 南懷仁卒. 繼南懷仁者有張誠. 張誠曾襄尼布楚條約之成. 約成回京, 與教士白晉逐日入宮, 將幾何原本, 應用幾何, 幷西方哲學, 譯成滿文, 用以授帝.〔見北京政聞報, 第四八一－四八二頁. (註 22) 〕

(註 19) Coriolis: Esquises jaunes—3—Le 12 Février 1704 à Pékin, La politique de Pékin, No. 48—28, Nov. 1926. Pékin.

(註 20) 見科學第三卷第十期(民國六年十月)插圖. 圖原本見 Mrs Archibald Little: The Land of Blue Gowr. 第七頁, 1902. 年出版.

(註 21) Coriolis: B—42—Un Belge à la cour de Kang-hi, au 18e siecle, La politique de Pékin, No. 40—3, Oct. 1926. Pékin.

(註 22) Coriolis: B—27—Gerbillon (1644－1707), La politique de Pékin, No. 20－16 Mai, 1926. Pékin.

今清宮尚藏有滿文譯本幾何原本.

康熙二十八年己巳(1689) 是年二月聖祖幸觀星臺,與李光地談天文.〔見東華錄,「康熙四三」.〕

康熙三十一年壬申(1692) 是年正月聖祖御乾清門與羣臣論算數.〔見東華錄,「康熙四九」.〕

康熙三十二年癸酉(1693) 梅文鼎自序筆算五卷.

康熙三十四年乙亥(1695) 是年黃宗羲卒.

康熙三十七年戊寅(1698) 是年聖祖使白晉與法皇魯意第十四通使,并贈書四十九册.歸途與巴多明(Parrein, 1665-1741)同來.巴善科學,在京不久亦通華語.并用幾何,天文學,解剖學在宮教授.〔見北京政聞報,第六一五頁,及六四一頁(1926)(註23)〕

康熙三十九年庚辰(1700) 是年西一月張誠請於宮中賜與餘地用建天主堂許之.〔見北京政聞報,第四八二頁(1926).(註24)〕

(註23) Coriolis: B—31—Testament de l'Empereur Kanghi (1653-1722), La Politique de Pékin, No. 25-2) juin, 1926. Pékin. 又 Coriolis: B—32—Dominique Parrenin (1665-1741), La Politique de Pékin, No. 26-27 juin, 1926. Pékin.

(註24) Coriolis: B—27—Gerbillon (1644-1707).

梅文鼎自序環中黍尺五卷.

康熙四十二年癸未(1703) 是年張誠請建之天主堂落成.〔見北京政聞報,第四八二頁(1926).(註25)〕

康熙四十三年甲申(1704) 是年常額爲欽天監滿監正,常以算日食不合請罪.〔見東華錄,「康熙七二」.〕

是年杜德美(Pierre, Jartoux,法國人,1668-1720)在北京.〔見北京政聞報,第一二四九等頁(1926).(註26)〕割圓術中之杜術,卽出於杜德美.〔見梅瑴成赤水遺珍.〕

康熙四十四年乙酉(1705) 是年羅馬教王克列門(Clement XI)遣使鐸羅(Tournon, 1668-1710)來通使,幷商天主教儀,以西十二月三十一日入宮覲見.〔見清朝全史第三八章上四,及北京政聞報,第八四八……八四九頁,及八七三……八七五頁(1926).(註27)〕

(註25) 同24.

(註26) Coriolis: Esquises jaunes—3—Le 12 Fevrier 1704 à Pékin.

(註27) Coriolis: B—37—Mémorial sur la Légation à Pékin du patriarche de Tournon (1702-1706). La Politique de Pékin, No. 34-22 Août et No. 35-29 Août, 1926. Pékin.

康熙四十五年丙戌(1706) 鐸羅到京後宣教師便起內訌,繼則鐸羅被逐,以康熙四十九年(1710)卒於澳門.〔見前書.〕

康熙四十六年丁亥(1707) 是年西三月二十二日張誠卒.〔見北京政聞報,第四八二頁(1926).(註28)〕

康熙五十年辛卯(1711) 是年聖祖與直隸巡撫趙宏燮論算數謂:「算法之理,皆出於易經.卽西洋算法亦善.原係中國算法,彼稱爲阿爾朱巴爾.阿爾朱巴爾者,傳自東方之謂也」.〔見東華錄,「康熙八九」.〕是爲代數學輸入中國之始.按阿爾朱巴爾,數理精蘊(1723刻)內西洋借根法作阿爾熱巴拉,梅穀成:赤水遺珍作阿爾熱八達.穀成以康熙五十一年供奉內廷後,蒙聖祖授以借根方法,因作「天元一卽借根方解」,載於赤水遺珍內.〔見數理精蘊,赤水遺珍,梅文鼎年譜.〕

康熙五十二年癸巳(1713) 是年聖祖始編律呂算法等書.〔見東華續錄,「乾隆一四」.〕

是年聖祖命和碩莊親王(允祿)等,率同儒臣於

(註28) Coriolis: B—27—Gerbillon (1644-1707).

暢春園蒙養齋,開局測太陽高度.得黃赤大距爲二十三度二十九分三十秒.〔見歷象攷成後編,卷一,第五頁.(註29)〕

康熙五十三年甲午(1714)　是年始擬以律呂,歷法,算法三書共爲一部,名曰律歷淵源.〔見東華錄,「康熙九四」,東華續錄,「乾隆一四」.〕

是年十一月分遣修理歷法何國棟等於廣東,雲南,四川,陝西,河南,江西,浙江,測量北極高度及日晷.〔見東華錄,「康熙九四」.〕

康熙五十五年丙申(1716)　是年明圖爲欽天監滿監正.〔見東華錄,「康熙九七」.〕

康熙五十六年丁酉(1717)　重申天主教禁令.〔見東華錄,「康熙九九」.〕

康熙五十七年戊戌(1718)　是年仲秋年希堯自序測算刀圭三卷於石城官舍.計分三卷;一曰,三角法摘要,一曰,八線算數表,一曰,八線假數表.〔見測算刀圭.〕

康熙五十九年庚子(1720)　是年羅馬教王克列

(註29)　光緒丙申,勵志書屋重刻本.

門復遣使馬薩巴巴(Mazzabarba)來.〔見北京政聞報,第五〇八頁(1926).(註30)〕

是年杜德美卒.

康熙六十年辛丑(1721) 是年梅文鼎卒.〔見梅文鼎年譜.〕

康熙六十一年壬寅(1722) 是年六月數理精蘊,曆象攷成皆告成.〔見東華續錄,「乾隆一四」.〕

雍正元年癸卯(1723) 是年柏鄉魏荔彤刻兼濟堂纂刻梅勿菴先生歷算全書.

是年冬十月律曆淵源一百卷刻成.分三部:一曰歷象考成,一曰律呂正義,一曰數理精蘊.〔見東華錄,「雍正三.」〕主其事者爲何國宗,梅穀成,而明安圖,顧陳垿(1678—1747)亦在攷測之列.歷象攷成上編卷二,卷三「論弧三角形」,數理精蘊下編卷十五割圜篇以內容外切多邊形證測量全義所謂周徑相與之率,「今士之法,其差甚微,子母之數,積至二十一位」.

(註30) Coriolis: B—27—Ambassades et Ambassadeurs auprès des Fils du Ciel 2637—av. J. C.—1820 ap. J. C., La Politique de Pékin, No. 21—23 Mai, 1926 Pékin.

雍正二年甲辰(1724) 是年以浙江制府滿公上言,諭禁(天主教).〔見梁章鉅: 梁氏筆記.〕

雍正三年乙巳(1725) 是年命內閣學士何國宗將「算法館」行走明白測量人員,帶去測量河道.〔見東華錄,「雍正七」.〕

是年羅馬教王伯納地哆(Benoît XIII) 來通使.〔見東華錄,「雍正七」.〕

是年羅馬教王伯納地哆遣兩教士(Carmes, Gothard 及 Ildephonse (漢名未詳) 來修好. 是年終并遣使賚來地球儀等,以爲覲儀,世宗作書報之.〔見北京政聞報, 第五〇八頁 (1926). (註 31) 〕

雍正六年戊申(1728) 是年添設欽天監西洋人監副一人.〔見東華錄,「雍正一三」.〕

雍正八年庚戌(1730) 是年欽天監監正;滿人爲明圖,西洋人爲戴進賢(Kogler, Ignace 日耳曼人,生卒年未詳),監副爲西洋人徐懋德(原名未詳).

是年六月明圖上書請重修曆法. 因修得日躔

(註 31) Coriolis: B—27—Ambassades et Ambassadeurs auprès des Fils du Ciel 2637 av. J. C.—1820 ap. J. C.

月離表以補律歷淵源之缺.是表原係戴進賢所作,因無解說并推算之法,當時惟徐懋德,明安圖能用此表.〔見歷象攷成後編,「奏議」第一,二,五,六頁.〕

雍正十三年乙卯(1735) 是年五月年希堯自序面體比例便覽,此書係將數理精蘊中有通率之數,每錄一二條,以便初學.

乾隆元年丙辰(1736) 順天府丞梅瑴成請許民間翻刻律曆淵源許之.〔見歷象攷成後編,「奏議」第三頁.〕

乾隆二年丁巳(1737) 是年四月顧琮請修日躔月離表解圖說.〔見歷象攷成後編,「奏議」第五……六頁.〕

是年敕編歷象攷成後編十卷.〔見四庫全書總目,卷一〇六.〕

乾隆三年戊午(1738) 是年以允祿總理增補日年交食表圖說,顏爲歷象攷成後編.〔見歷象攷成後編,「奏議」第七……一〇頁.〕

乾隆七年壬戌(1742) 是年歷象攷成後編十卷告成.任彙編者爲顧琮,張照,何國宗,梅瑴成及欽天

監滿監正進愛，西洋監正戴進賢，西洋監副徐懋德，并食員外郎倖，欽天監五官正明安圖.〔見歷象攷成後編，「奏議」第一〇……一三頁，并「職名」第一頁.〕曆象攷成後編卷一，曾說明橢圓定理爲以前曆書所未道.

乾隆九年甲子(1744) 是年戴震自序所著策算.

是年勅撰儀象攷成三十二卷.〔見四庫全書總目.卷一〇六.〕

乾隆十七年壬申(1752) 是年儀象攷成三十二卷告成.〔見四庫全書總目，卷一〇六.〕

乾隆十八年癸酉(1753) 是年裁欽天監滿漢監副各一人，增西洋監副一.〔見清通志第二九卷.〕

乾隆十九年甲戌(1754) 是年戴進賢又創製「璣衡撫辰儀」，自撰璣衡撫辰記二卷，冠於儀象攷成之首.〔見清通志，第二三卷，及常福元：天文儀器志略，第三二……三三頁.(註32)〕

同時西洋人官欽天監者有傅作霖(原名未詳).〔見清文獻通攷，第二九八卷.〕

(註32) 京華書局本.

乾隆三十四年己丑(1769) 許宗彥父名祖京,乾隆己丑(1769)由內閣歷任廣東布政使.宗彥隨宦在粵.許宗彥.鑑止齋集卷十四,「記荷邏侯星條」稱;「曩在粵東,西士彌納和〔今在欽天監,改姓南,不知其名.〕……」.蓋是時西士當有服務欽天監者.〔見鑑止齋集,「家傳」及第一四卷.〕

對數之發明及其東來

目次

14. 乘方捷術.

15. 算賸續編,造各表簡法.

16. 代數學,萬象一原.

17. 代數術,對數詳解.

18. 微積溯源,對數表,對數述.

19. 三角數理,對數表引説,用對數表訣,造對數法.

20. 代數學補式,算式解法,有不爲齋算學,對數旁通,對數較表,對數捷法,對數淺釋,對數四問.

(三) 對數之東來下.

21. 對數輸入日本之經過.

22. 不朽算法,眞假數表及對數表起源.

23. 對數表起源,作對數表法,加減代乘除表.

24. 對數表製法,對數表精解.

25. 算法對數表,乘除對數表,對數表.

(一) 對數之發明[1]

1. 訥白爾傳略

(1) 參看 Cajori, F.: A History of Elementary Mathematics, N. Y. 1917, pp. 153—167. 及 D'ocagne, M.: Some Remarks on Logarithms Apropos to Their Tercentenary, from the Smithsonian Report for 1914, Washington, 1915, pp. 175—181. Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I. 1923, pp. 389—392, Vol. II. 1925, pp. 202—203, pp. 513—523.

對數之作,遠在十七世紀,前乎此者阿基米得(Archimedes, 287?–212 B. C.),斯提斐爾(Stifel, 1486或1487–1567)雖具此概念,而終未有成.若十五世紀末葉德人製有精密三角表,雖亦有功於世,然而計算需時,終多不便.至對數表出,方稱便焉.拉普拉斯(Laplace, 1749–1827)曾言;對數之發明,不啻因減省天文家之工作,而倍蓰其壽命.觀此則對數在科學界之貢獻,誠非淺庸者所可比擬矣.

對數爲蘇格蘭之麥執斯吞(Merchiston)男爵約翰.訥白爾(John Napier)[2]所發明.氏以1550年生於愛丁堡附近之麥執斯吞,1617年四月四日卒,壽七十七歲.1563年氏年十三,肄業聖安德魯(St. Andrew)之聖薩爾瓦托爾(St. Salvator)學校.其叔曾語其父曰,此兒當送往法國或法蘭德斯(Flanders),因在家園實無所學.訥白爾遂就學於外.1571年回麥執斯吞,是歲結婚.1608年其父卒後襲其遺業焉.氏好算數,曾四十年從事此道,最致力於算數簡易之則,略習球面三角術者,當知訥氏比例式(Napier's analogies)及球面

(2) 拉丁文作 Neperius, 法文作 Neper. 此外亦作 Naperus 或 Naper.

三角形訥氏記法 (Napier's rule of circular part) 極便記憶. 1617 年曾出版剌布多羅基亞 (Rabdologia) 一書, 述訥白爾籌 (Napier's rods or bones)[3] 及其他乘除簡算之器具. 此書流傳歐洲大陸, 視所發明之對數為尤廣, 雖遲至 1721 年哈頓 (E. Hatton) 所著算術書, 尚以訥白爾籌說明乘除開方算法, 故其輸入中土, 亦視對數為早.

訥氏對數實係歷久艱辛思索之所得, 因近代於 $n=b^x$ 時, 可稱 x 為 n 之對數, 而其底為 b, 但在訥氏之時, 指數記法尚未發明, 即斯提斐爾及斯提焚 (Stevin, 1548–1620) 之指數概念亦未完成, 而赫黎奧替 (Harriot, 1560–1621) 在訥氏卒去之後, 於其所著作代數書中尚未言及指數, 直至歐拉 (Euler, 1707–1783) 方始察出對數及指數之關係, 訥氏對數乃能先指數而發明, 實為科學界之珍聞, 彼循何道而發現, 是固

(3) 參看 M. Terquem: Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathematiques, "Neper" 條, Paris, 1855, pp. 109—110. 或第九版大英百科全書, "Napier, John" 條. 剌布多羅基亞之各版本及其譯本如原本: Rabdologiæ, Sev. Numerationis Per Virgulas Libri Dvo, Edinburgh, 1617; Leyden, 1626. 譯本, Verona, 1623; Berlin, 1623.

讀者所樂聞也.

2. 訥白爾對數之計算(4)

訥白爾卒於1617年,其子羅伯(Robert)於1619年再版父書,并附其對數計算之說明.其法令AB直線上有兩點L及N,并由A點向B進行.起始進行速度相同,假令爲$\frac{AB}{n}$,而n爲任意之數.就中L點每次以$\frac{AB}{n}$之速度在AB進行,而N點每次之速度逐漸減少,因其速度并以"由某點至B,再以n除之距離"爲律,N點愈進行,其速度愈減,如在t時間,N點至P處,則其速度爲$\frac{PB}{n}$.由是逐漸減少,至通過B點時,其速度爲負數.其在t時間N點至P處,L點至Q處,則訥氏稱LQ爲NP之對數.

訥氏之最初目的,原爲簡便三角函數計算起見,故其對數乃照正弦數目,并不照1, 2, 3, 4,……等數逐一計算.其正弦九十度令爲10^7,以後逐漸縮小,今以代數號記之,如;

(4) 參看 M. Terquem : Bull. de biblio. d'histoire et de biog. math. 內 "Notice sur la découverte des logarithmes", Paris, 1855. pp. 40.

$d=AB=$ 正弦九十度.

$x=$ 在 T 時間, L 點進行之路程, 其量如等差級數.

$y=$ 在 T 時間, N 點進行之路程, 其量如等比級數.

$md=1=L, N$ 二點起始進行之速度.

$d-y=N$ 點於 T 時在 B 終點之距離.

T 時可分爲 n 數極多之短時間, 每次爲 t, 則在每時間 $0, t, 2t, 3t, \cdots\cdots, nt$ 之終點, x 進行之距離爲 $0, md, 2md, 3md, \cdots\cdots, nmd$. 而每次 $d-y$ 之值爲

$$d,\ d(1-m),\ d(1-m)^2,\ d(1-m)^3,\ \cdots\cdots,\ d(1-m)^n.$$

於 T 時, $x=nmd,\ y=d-d(1-m)^n=a-d\left(1-\frac{x}{nd}\right)^n$,

$$y=d-d\left[1-\frac{x}{d}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{x^2}{n^2d^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{x^3}{n^3d^3}+\cdots\right]$$

如 n 爲無窮大, 則

$$y=d-d\left[1-\frac{x}{d}+\frac{1}{\underline{|2}}\cdot\frac{x^2}{d^2}-\frac{1}{\underline{|3}}\cdot\frac{x^3}{d^3}+\cdots\cdots\right]$$

$=d-ae^{-\frac{x}{d}}$, 而 e 爲自然對數之底.

則 $\frac{d-y}{d}=e^{-\frac{x}{d}}$, $\quad -\frac{x}{d}=\text{nat. log}\,\frac{d-y}{d}$.

$$x = -d \text{ nat. log} \frac{d-y}{d}.$$

但 x 為 $d-y$ 之訥白爾對數，故

$$\text{nap. log}(d-y) = -d \text{ nat. log} \frac{d-y}{d} = d \text{ nat. log} \frac{d}{d-y}.$$

訥白爾以 $d=10^7$，如 $d-y=z$，則

$$\text{nap. log } z = 10^7. \text{ nat. log} \frac{10^7}{z} \text{ 矣.}$$

訥白爾以 $d=10^7=\sin 90°$，卽 $\frac{d}{2}=5.\ 10^6=\sin 30°$. 在訥表中，

$$\log \sin 30° = 6931471,808942;$$

因 $\frac{d-y}{d}=\frac{1}{2}$，則 $\text{nat. log} \frac{1}{2} = -0,6931471805599$. 欲得訥對之值，當以 -10^7 乘之，卽得 6931471,805599 故訥表之差，僅在小數十位下單位之三分一.

訥白爾實際計算對數，并不用級數，而直接計算 d, $d(1-m)$, $d(1-m)^2$, $d(1-m)^3$, …… $d(1-m)^{100}$ 之值，而以 $d=10^7$, $m=10^{-7}$，其計算方法，頗為簡便. 卽令第一項 $d=10^7$，次以 $d=10^7$ 除第一項而減之為二項；又以 $d=10^7$ 除第二項而減之為第三項，逐次如是，其次序如下表:

d	10000000.0000000
	1.0000000
$d(1-m)$ ……	9999990.0000000
	0.9999999
$d(1-m)^2$……	9999998.0000001
	0.9999998
$d(1-m)^3$……	9999997.0000003
	………………………
$d(1-m)^{100}$ …	9999900.0004960

而 $d(1-m)^{100}=10^7(1-10^{-7})^{100}$;

如按二項式定理展開之,算至10^{-21},則

$$d(1-m)^{100}=9999900.0004998383300392122.$$

此與訥白爾所得者,相差極微.

為計算精密起見,訥白爾曾以幾何證得$\log(d-y)$係在y與$\frac{dy}{d-y}$兩限之間.故每次欲求$\log(d-y)$之真值,先求y與$\frac{dy}{d-y}$,次取其值之中數可矣.茲所解析法說明之.

$$\text{nap. log } d-y = -d \text{ nat. log}\left(1-\frac{y}{d}\right)$$

$$= y+\frac{1}{2d}\cdot y^2+\frac{1}{3d^2}\cdot y^3+\frac{1}{4d^3}\cdot y^4+\cdots;\cdots(1)$$

$$\frac{dy}{d-y}=\frac{y}{1-\frac{y}{d}}=y+\frac{y^2}{d}+\frac{y^3}{d^2}+\frac{y^4}{d^3}+\cdots\cdots\cdots;$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{d-y}+y\right)=y+\frac{y^2}{2d}+\frac{y^3}{2d^2}+\frac{y^4}{2d^3}+\cdots\cdots\cdots;\cdots(2)$$

以(1),(2)比較,所差在第三項以後,其值爲

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{d^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{d^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{y^3}{d^2}.$$

故欲使在小數十四位以下,卽在 10^{-14} 時僅差一單位,則必令 $y=\sqrt[3]{6}$,且 y 當在1與2之間.茲以 $y=1$,卽 $d-y$ $=9999999$, $\frac{dy}{d-y}=\frac{10^7}{10^7-1}=1.000000100000001$;

而 y 與 $\frac{dy}{d-y}$ 之中數爲 1.00000005 $\cdots\cdots\cdots\cdots (1)_1$.

此約爲 $10^7-1=9999999$ 之訥白爾對數,

實際 $\text{nap. log }(10^7-1)=-10^7 \text{ nat. log } 1-10^{-7}$,

$$=1+\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}+\frac{1}{3}\cdot 10^{-14}+\frac{1}{4}\cdot 10^{-21}+$$

$$=1.0000000500003333;\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)_1.$$

比較 $(1)_1$ 及 $(2)_1$ 式,知其僅在小數十四位下差單位之三分一也.

故 $10^{-7}(1-10^{-7})=9999999$ 之訥對爲 1,00000005 亦即 $y=1$ 及 $\frac{dy}{d-y}=\frac{10^{-7}}{10^{-7}-1}$ 之平均數,又 $\log 10^7(1-10^{-7})^{100}=\log 9999900=100.00050$. 換言之,凡數在 9999999 與 9999900 中間,眞數之等比率爲 $(1-10^{-7})$,而對數之等差率爲 1.00000005 是爲第一表.又因 9999900 之數,訥白爾用以計第二表,其等比率爲 $\frac{9999900}{10^7}=\frac{99999}{10^5}=\frac{10^5-1}{10^5}=1-\frac{1}{100000}$; 如前例,以 $d=10^7$, 逐次以 $\frac{1}{10^5}$ 乘前數,減餘約及五十次得 9995001,224804 由是 9995000 之對數值,可如前例由 y 及 $\frac{dy}{d-y}$ 之平均數而得 5001.25041645. 換言之,凡數在 9999900 與 999500 中間,眞數之等比率爲 $(1-10^{-5})$, 而對數之等差率爲 100.00050.

又因 9995000 之數,訥白爾用以計第三表,其等比率爲 $\frac{9995000}{10^7}=\frac{9995}{10^4}=1-\frac{1}{2000}$; 如前例,以 $d=10^7$,逐次以 $\frac{1}{2000}$ 乘前數,減餘約及二十次得 9900000, 而其對數值爲 100503,3585228.

又因 9900000 之數,訥白爾用以計第四表,是爲根表 (table radicale),其等比率爲 $\frac{99}{100}=1-\frac{1}{100}$;如前例,以 $d=10^7$ 爲第一項,求至第六十九項得 4998609,4034 約爲 10^7 之半數,而其對數爲 6934253,4 約與正弦 30 度之對數相等.如求 30 度以下之正弦對數,訥白爾因 $\log(d-y_1)-\log(d-y_2)$ 在 $\frac{y_2-y_1}{d-y_2}d$. 及 $\frac{y_2-y_1}{d-y_1}d$ 中間之理而攷得之.以上所述僅及大意,其詳見 Journal des savants (1835, p. 354) 中俾奧 (M. Biot) 之論文.

3. 訥白爾對數表及其版本

訥白爾以 1614 年六月在愛丁堡發表所著對數表 (Mirifici logarithmorum canonis descriptio), 其中五十六頁爲說明,九十頁爲表,篇末誌稱:"此表之製作,必需多數人之工力,今以獨力製定,則錯誤在所不免."然此表除極少數外,實際尚無多誤.(5)第一版之訥白爾對數表今藏法國通儒院藏書樓 (La bibliothèque de L'Institut),以 1834 年由佛蘭生 (J. F. Français) 處購入.原書爲阿波給斯 (Arbogast) 舊藏,1810 年卒時遺

(5) 見 Napier's Construction (Macdonald's Ed.), pp. 87, 90–96.

贈與佛蘭生兄弟者.[6]至1619年訥子伯羅重印父書,并附說明,其計算方法,始爲世所通曉.此外又有1616,1889 (Edinburgh); 1620 (Leyden); 1616,1618 (London) 之各種版本.

訥白爾表於1895年以拉丁文覆印於巴黎,於1889年由馬克多那爾(W. R. Macdonald)以英文覆印於愛丁堡.訥白爾著書輸入法國,實始於翁里奧(Henrion).渠於1620年覆印訥書於里昂(Lyon).至自然對數表則由英人溫蓋(Wingate)輸入法國.近三百年各國印行對數表之數,且在五百以上.[7]其小數位較少者,當推1770年伽地納(Gardiner)在亞威農(Avignon)所印之小數七位之對數表.但卷帙頗大,不便取攜.至1785年卡勒(Callet)製成小本,由當時名手第多(Ambroise Didot)印行,其子Firmin Didot發明鉛版,改良印刷,衆始稱便焉.

茲列1614年之訥白爾對數表樣張如下:

---

(6) 見M. Terquem: "Notice sur la découverte des logarithmes", p. 40.

(7) 參觀法文數學叢書(Gauthier-Villars, 1909). 及Knott, C. G., The Napier Tercentenary Memorial Volume, Messrs. Longmans, Green, & Co., London, 1915.

Gr.						
0	0		+	−		
	sinus	logarithmi	differentiae	logarithmi	sinus	
0	0	infinitum	infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562746	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55

表內首頁下右邊書"89"以誌八十九度.其在"sinus"行內樣張內曾舉正弦0度0分至5分,或正弦89度55分至60分之值.在"logarithmi"行內誌上述正弦之對數,在"differentiae"行內,為此行內之對數較.因 $\sin x=\cos(90^\circ-x)$, 則此表實際已具餘弦及其對數之值.如 $\log\cos 0^\circ 5'=11$, 則 $\log\cos 89^\circ 55'=65331315$. 且因 $\log\tan x=-\log\cot x=\log\sin x-\log\cos x$. 則"differentiae"行內如為+即係正切之對數,如為−即係餘切之對數.

4. 巴理知傳略

訥白爾對數不久卽馳譽英國及歐洲大陸．恩利格.巴理知(Henry Briggs,1556—1630)[8]者先爲倫敦格勒善學校(Gresham College)教授,次爲牛津大學教授,素仰訥氏對數之發明,不久巴理知卽離倫敦而參見所崇拜之訥白爾.二人心儀已久,時巴以事遲,訥方對其友語巴未必卽臨,巴適叩閽請謁.相見之頃,彼此注視移時,無復一言.最後巴理知致其欽仰之詞.[9]又告訥白爾擬以零爲全正弦之對數,而以10^7爲$5°44'22''$正弦之對數.訥白爾亦以此修正爲然,幷如巴氏意以0爲1之對數,10^7爲全正弦之對數,又以指標爲正.自此巴氏乃着意以10爲底成新表.1617年訥白爾逝世,卒藉巴氏之力,竟其未完之業.巴理知以1624年成巴理知對數表(arithmetica logarithmica),具數由一至二萬,又由九萬至十萬,對數之小數算

(8) The Dict. of National Biography 謂生於1561年. Fink 數學史謂1560年2月生於Yorkshire之Halifax附近之Warley Wood. Smith 數學史謂據教區紀錄,應作1560/61.

(9) 見 Mark Napier's Memoir of John Napier, 1834, p. 409.

至十四位.[10] 1628年荷蘭國高達(Gouda)地方之佛拉哥(Adriaen Vlacq. 約生於1600年,卒于1655年後)覆刻巴理知對數表,計由一至十萬,就中二萬至九萬之對數,爲佛拉哥所補.

5. 自然對數

訥氏對數與以 $e=2.718\cdots\cdots$ 爲底之自然對數(natural logarithms)絕不相同.普通代數教科書謂;自然對數爲訥氏所發明.實屬大誤,讀者幸注意之.[11]在1618年來特(Edward Wright)譯本之訥白爾對數表不記名之附卷中始首言自然對數.附卷中又言補插法(interpolation)疑爲奥德(William Oughtred, 1574—1660)手筆.所述補插法以七十二個正弦之對數,求其餘之對數.又在表中以 $\log 10=2.302584$,但在近世則書 $\log_e 10=2.302584$.

自然對數之制,以新對數表(new logarithms)所

(10) W. W. R. Ball: A Short Account of the History of Mathematics, 1901, pp. 202—203.

(11) 十九世紀末葉德人首正其謬,見 Dr. S. Günther: Vermischte Untersuchungen, Chap. V.

述爲始.是書於 1619 年由倫敦數學教授斯坡得爾 (John Speidell) 印於倫敦.然實際斯坡得爾對數尙非自然對數.如訥白爾謂 sin 30′=87265, 而半徑 $=10^7$, 故實際 sin 30′=0.0087265, 而此數之自然對數爲 5,25861 加 10 得 5.25861. 斯坡得爾則稱 log sin 30′=525861. 以公式表之,應作

$$\text{sp.}\log x=10^5\left(10+\log_e\frac{x}{10^5}\right).$$ (12)

1622 年之新對數表爲由一至千之自然對數表,但表不記小數點.其前在 1618 年又有一小表僅有七十二對數.斯坡得爾爲最初公表自然對數表之人.其更精善者;要數烏弗蘭 (Wolfram) 之自然對數表.其數由一至萬,而小數算至四十位,於 1778 年公世,渠係荷蘭礮隊副隊長,計算此表,費時六年云.最完善之自然對數表當推德人達士 (Zacharias Dase) 於 1850 年在維也納所印者.至 1819 年有名黑 (Ree) 者,所編百科全書於"雙曲線對數"條亦有一表云.

---

(12) 其詳參觀 Quarterly Journal of Pure and Appl. Math. Vol. 46, 1915, pp. 174—178. 第九版大英百科全書"Tables"條. Report of the British Association for the Advancement of Science for 1873. "Table"條, pp. 1—175

至於多位小數之對數,則烏弗蘭之外,沙普(Sharp)算至61位,亞當斯(Adams)算至260位.然此二人所算者,僅2, 3, 5, 7, 10各數之自然對數,及對數根而已.[13]

6. 柏格對數及其他

此外尚有一軼事,卽與訥白爾同時有瑞士人柏格(Justus Byrgius, Jobst Bürgi, 1552–1632)於訥白爾對數表出版後六年,亦出版一粗糙之對數表.柏格少年時爲鐘錶匠,其後至加塞爾(Kassel)天文臺,又在布拉格(Prague)與刻卜勒(Kepler, 1571–1630)共事,其言對數似早於訥白爾,惟其公世爲期稍遲.[14]

對數之計算,在訥白爾,巴理知,刻卜勒,佛拉哥幷因等比級數,等差級數對列之義求之.但在對數表大致編輯完成之後,芬遏特(Gregory St. Vincent, 1584–1667),牛頓(Newton, 1642–1727),麥揆忒(Nicolaus Mercator, 1620?–1687)諸人,又發現對數可以無限級數表之.麥揆忒實發明$\log(1+x)$之級數.芬遏特於1647

(13) 六十位之對數根,見華,傅譯代數術第十八卷.

(14) 參觀 Gerhardt: Gesch. d. Math. in Deutschland, 1877, p. 75, 119.

年算割圜術時稱雙曲線與漸近線中間之積,卽爲雙曲線對數積.麥揆式於1668年稱對數級數之值,可由雙曲線間各積之總和而得.(15)

二　對數之東來上

7. 對數輸入中國之經過

對數首先由西士穆尼閣輸入中國,稍次則有數理精蘊之作,惟穆尼閣謂解此別有專書,而數理精蘊亦不言其理.直至同光間李善蘭華衡芳始由西士譯出代數學,代數術諸書,由是近世對於對數之說明,始爲世所通曉.前乎此則戴煦(1805–1860),李善蘭(1809–1882),鄒伯奇(1819–1869),顧觀光(1799–1862),徐有壬(1800–1860)幷有詳細之論述,在代數學代數術譯書之前,事尤可珍.其中文論列對數之書可得下列各種:

(1) 比例對數表十二卷,穆尼閣著,薛鳳祚纂(1653).

(2) 比例數解四卷,淸梅文鼎撰.

---

(15) 其詳參觀第九版大英百科全書"logarithms"條.

(3) 數理精蘊(1723).面體比例便覽,清年希堯撰(1735).

(4) 算法大成上篇,清陳杰撰(1844).

(5) 對數簡法二卷(1845),續對數簡法一卷(1846),假數測圓二卷(1852),清戴煦撰.

(6) 方圓闡幽.弧矢啟祕,對數探源,清李善蘭撰(1846?).

(7) 圓錐曲線三卷,李善蘭譯,級數回求,李善蘭撰.

(8) 數學啟蒙二卷,英國偉烈亞力(A Wylie)撰(1853).

(9) 乘方捷術三卷,清鄒伯奇撰.

(10) 算賸續編清顧觀光撰(1854).

(11) 造各表簡法,清徐有壬撰.

(12) 代數學十三卷,英國棣麼甘(Aug. De Morgan)撰,英國偉烈亞力口譯,海寧李善蘭筆受(1859).

(13) 萬象一原夏鸞翔撰(1862).

(14) 代數術二十五卷,英國華里司輯,傅蘭雅(J. Fryer)口譯,金匱華蘅芳筆述(1873).

(15) 對數詳解五卷,清丁取忠,曾紀鴻同撰(1874).

(16) 微積溯源八卷,英國華里司輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述(1874).

(17) 對數表四卷,四册,清賈步緯校,江南製造局印.

(18) 對數表一册,附八線對數表,八線表.英國路密司(Loomis)撰,赫士譯,高密朱葆琛筆述.

(19) 對數述四卷,清陳其晉撰(1877).

(20) 三角數理十二卷,英國海麻士輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述(1877).

(21) 對數表引說一卷,用對數表訣一卷,造對數表法一卷,清朱湘澄,未刊.

(22) 代數術補式二十二卷,解崇輝撰(1899).

(23) 算式解法十四卷,美國好敦司開奈利同撰,英國傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述(1899).

(24) 有不爲齊算學二種四卷,傅九淵撰.

(25) 對數旁通一卷,蔣士棟撰(1897?).

(26) 對數較表一卷,廖家授(1860–1890)撰.

(27) 對數捷法一卷,陸采撰,見杭州藝文志.

(28) 對數淺釋一卷,江衡撰,溉齊算草之一.

(29) 對數四問劉彝程撰,經世文續編本.

8. 比例對數表,比例數解

(1) 比例對數表. 薛鳳祚比例對數表(1653)序稱"……穆(尼閣)先生出,而改爲對數,今有對數表,以省乘除,而況開方立方三四方等法,皆比原法工力,十省六七,且無舛錯之患,此實爲穆先生改曆立法第一功.予執筆以受,時以重譯,於戊辰(1628)曆元後二十五稔,(1653),歲在壽星,曆春旣夏而秋,方盛暑則烈陽薰灼,揮汗浹背,勞誠勞矣,功於何有!"

穆尼閣解釋對數之大意,謂:"愚今授以新法,變乘除爲加減,……,解此別有專書,今特略明其理,如下二表,二同餘算,不論從一,二,三,四起,或從五,七,九,十一起,但同餘之內,中三相連度數,可取第四."

比例算	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
同餘算 (*a*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
同餘算 (*b*)	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

如"同餘算(*a*)"內之6, 7, 8, 9有$9=(7+8)-6$之關係,

又"同餘算(*b*)"內之5, 7, 9, 11有$11=(7+9)-5$之

關係.

而對"問餘算"內之"比例算"四率成比例,有 32:64=128:256 又有 1:2=4:8 之關係.故按上表"比例算"內 4:32=128:x 或 $x=\frac{32\times128}{4}$,此式本應乘除,今僅用加減,因對 32 爲 6,對 128 爲 8,對 4 爲 3,則對 x 爲 $(6+8)-3=11$,檢表知 11 之對爲 1024,卽 $x=1024$ 也.比例數表十二卷,題南海穆尼閣著,北海薛鳳祚纂.表中原數,比例數并列比例數有小數六位.書稱"原數當用十萬,其表久成,還西來不戒,失之於途,今止一萬,……原數一萬之外,取比例法."

如求 $\log 160232=?$

$$\log 1602 = 3.204662,$$
$$\log 160200 = 5.204662,$$
$$\log 1603 = 3.204933$$

$$\log 1603-\log 1602=0,000271$$
$$\frac{32}{100}\times 0.000271=0.000086$$
$$\log 160200=5.204662$$
$$\therefore\quad \log 160232=5.204748$$

(2) 比例數解.清梅文鼎(1633–1721)勿菴曆算書目(1702 自序)[16] 稱"一比例數解四卷.

比例數表者,西算之別傳也.其法自一至萬,幷設有他數相當,謂之對數假令有所求數[或乘或除],[17]

(16) 見知不足齋叢書本,第三九……四一頁.

(17) 本篇凡引用本文作"……",引用本文中小註作[……].

但於本表間兩對數相加減,卽得相求.[乘者兩對數相加得總,除者兩對數相減卽較.總較各以入表,取其所對本數,卽各所求之乘得數,除得數.]……

前此無知者,本朝順治間西士穆尼閣以授薛(鳳祚)儀甫始有譯本.……又有四線比例數亦穆所授也.八線割圓,西曆舊法,今只用正弦,餘弦,正切,餘切,故曰四線.……

穆先生曰;表有十萬,西來不戒於途,僅存一萬,萬以上,以法通之.[……嘗見薛刻別本,數有二萬].

儀甫又有四線新比例,用四線同,惟度析百分,[從古率也]穆有天步眞原,薛有天學會通,并依此立算,不知此,則二書不可得以讀,故稍爲詮次,爲初編之第四書."

9. 數理精蘊,算法大成

(3) 數理精蘊. 清康熙癸巳(1713)始編律呂算法等書.[18]康熙甲午(1714)始擬以律呂曆法算法三書共爲一部,名曰律曆淵源.[19]康熙壬寅(1722)六月數

(18) 見東華續錄"乾隆"一四.

(19) 見東華錄"康熙"九四.

理精蘊,曆象攷成皆當成.[20] 雍正癸卯(1723)冬十月律曆淵源一百卷刻成,分三部,一曰曆象攷成,一曰律呂正義,一曰數理精蘊,雍正帝製序.[21] 數理精蘊下編卷三十八,末部八,有"對數比例,"其目爲:對數比例,明對數之原之一……三,明對數之綱之一……二,明對數之目,用中比例求假數法之一……二,又用遞次自乘求假數法之一……二,又用遞次開方求假數法之一……七,又用前所得九十九數,求他假數法之一……三.求八線對數,對數用法.

其"對數比例"稱:"對數比例,乃西士若往,訥白爾(John Napier)所作,以借數與眞數對列成表,故名對數表.又有恩利格,巴理知斯(Henry Briggs)者,復加增修,行之數十年,始至中國.其法以加代乘;以減代除;以加倍代自乘,故折半卽開平方;以三因代再乘,故三歸卽開立方.推之至於諸乘方,莫不皆以假數相求,而得眞數.蓋爲乘除之數甚繁,而以假數代之甚易也.其立數之原,起於連比例,蓋比例四率;二率與三率相乘,一率除之,得四率.以遞加遞減之四

(20) 見東華續錄"乾隆"一四.

(21) 見東華錄"雍正"三.

數;第二數第三數相加,減第一數,則得第四數.作者有見於此,故設假數以加減代乘除之用,此表之所以立也".其言比例四率,幷遞加遞減之四數,與穆尼閣解析對數之大意相同.

其"明對數之原"與"明對數之綱"則設下列各表,如(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7)以見"假數可隨意而定."因便利起見,用(5),(6),(7)之假數.因"乘除之數始於一,故一不用乘,亦不用除;而加減之數始於0,故0無可加,亦無可減也"."故1之假數,必定爲0",如 $\log 1=0$ 是也."而一與十,十與百,百與千,……皆爲加十倍之相連比例率.然其數皆爲一,但遞進一位",如(5).且如是則"眞數不同,而位數同者,其假數雖不同,而首位必同".如(6),首位幷爲0,又"眞數相同,而遞進幾位者,其假數首位必遞加幾數,而次位以後却相同".如(7)是也.

其"明對數之目"有(1)"用中比例求假數法",則因"凡連比例率,以首率末率兩眞數相乘開方,卽得中率之眞數;以首率末率兩假數相加折半,卽得

眞數	假數
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8

(1)

眞數	假數
2	3
4	5
8	7
16	9

(2)

眞數	假數
1	4
3	5
9	6

(3)

眞數	假數
1	8
3	5
9	2

(4)

眞數	假數
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
10000000	7
100000000	8

(5)

眞數	假數
2	0.3010299957
3	0.4771212547
4	0.6020599913
5	0.6989700043
6	0.7781512504

(6)

眞數	假數
11	1.0413926852
110	2.0413926852
1100	3.0413926852
11000	4.0413926852
110000	5.0413926852

(7)

中率之假數",如

眞數　$1:x=x:10$, 則　$x=\sqrt{1\times10}=3.1622777$

假數　$0-y=y-1$, 又　$y=\frac{0+1}{2}=0.500$

故 $\log 3.1622777=0.500$ 是爲第一次.

如求 $\log 9$ 則如表所列,第五次以前,并以逐次所得之中率爲首率,以舊末率10爲末率,其五次以後,則因欲與所求9迫近之故,以逐次所得之中率爲首率,或爲末率;而以舊末率或首率與之相配.俾至二十六次,可得 $\log 9=0.95425125$ 焉.然而實際上 $\log 9=0.95424250944$. 蓋表中9,"七空位之後,尙有奇零,故所得之假數,猶爲稍大".

	眞	假
第	10000000	00000000000
一	31622777	05000000000
次	100000000	10000000000
第	31622777	05000000000
二	56234132	07500000000
次	100000000	10000000000
第	56324132	07500000000
三	74989421	08750000000
次	100000000	10000000000
第	74989421	08750000000
四	86596432	09375000000
次	100000000	10000000000
第	86596432	09375000000
五	93057204	09687500000
次	100000000	10000000000
第	86596432	09375000000
六	89768713	09531250000
次	93057204	09687500000

第七次	89768713	09531250000
	91398170	09609375000
	93057204	09687500000
第八次	89768713	09531250000
	90179777	09570312500
	91398170	09609375000
第九次	89768713	09531250000
	90173333	09550781250
	90179777	09570312500
第十次	89768713	09531250000
	89970796	09541015625
	90173333	09550781250
第十一次	89970796	09541015625
	90072008	09545898437
	90173333	09550781250
第十二次	89970796	09541015625
	90021388	09543457031
	90072008	09545898437

第十三次	89970796 89996088 90021388	09541015625 09542236328 09543457031
第十四次	89996088 90008737 90021388	09542236328 09542846679 09543457031
第十五次	89996088 90002412 90008737	09542236328 09542541503 09542846679
第十六次	89996088 89999250 90002412	09542236328 09542388915 09542541503
第十七次	89999250 90000821 90002412	09542388915 09542465209 09542541503
第十八次	89999250 90000041 90000821	09542388915 09542427062 09542465209

第十九次	89999250	09542338915
	89999650	09542407989
	90000041	09542427062
第二十次	89999650	09542407989
	89999854	09542417526
	90000041	09542427062
第二十一次	89999845	09542417526
	89999943	09542422294
	90000041	09542427062
第二十二次	89999943	09542422294
	89999992	09542424678
	90000041	09542427062
第二十三次	89999992	09542424678
	90000016	09542425870
	90000041	09542427062
第二十四次	89999992	09542424678
	90000004	09542425274
	90000016	09542425870

第二十五次	89999992	09542424678
	89999998	09542424976
	90000004	09542425274
第二十六次	89999998	09542424976
	90000000	09542425125
	90000004	09542425274
$\log 9 = 09542425125$		

又 (2)"用遞次自乘求假數法";

首引 $\log 2^1 = \log\ 2 = 0.3010299957$

$\log 2^2 = \log\ 4 = 0.6020599913 = 2\times 0.3010299957$

$\log 2^4 = \log 16 = 1.2041199826 = 4\times 0.3010299957$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\log 2^n = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = n\times 0.3010299957 = N$

以證 $\log a^n = n\log a = N$, $\log a = \frac{N}{n}$. 就中 a 爲所求眞數, n 爲率(卽指數), N 爲假數.如欲求 $\log 2$, 先記 2 之假數首位 0, $2^2=4$ 之假數首位 0, $2^4=16$ 之假數首位 1, $2^8=216$ 之假數首位 2, $2^{16}=65536$ 之假數首位 4, 逐次如是知 2^{16384} 之假數首位爲 4932. 則如前定義得 $\log 2=$

$\frac{4932}{16384}=0.3010$，再進求 $2^{137446953472}$ 之假數首位爲 41375-653307，則 $\log 2=\frac{41375653307}{137446953472}=0.3010299959$.

率	眞	假
1	2	0
2	4	0
4	16	1
8	256	2
16	65536	4
32	4294967296	9
……	……………	……
16384	……………	4932
137446953472	……………	41375653307

又 (3) "用遞次開方求假數法"；

(a) 前證 $\log a^n=n\log a=N$，則 $\log a=\frac{N}{n}$.

亦可證 $\log a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log a=N_1$，則 $\log a=n\,N_1$，

如下表：

率	眞	假
1	256	24082399653
2	16	12041199826
4	4	6020599913

故　$\log 256 = 2.4082399653$

則　$\log 16 = \log 256^{(\frac{1}{2})^1} = \frac{1}{2} \times 2.4082399653$

$= 1.2041199826$

又　$\log 4 = \log 256^{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4} \times 2.4082399653$

$= 0.6020599913.$

換言之，　卽 $\log 256 = 2 \times 1.2041199826$ 或 4×0.6020599913

$= 2.4082399653.$

(b) "凡遞次開方，率皆用二倍"，如自乘一次爲2，自乘二次爲4，自乘三次爲8，每增乘一次則多一倍，如下表："凡有眞數求假數，皆以所求之數爲一率，眞數開方幾次，則假數必折半幾次"，在前"用中比例求假數法"，已見其例.

眞數　$1 : x = x : 10$，　則　$x = \sqrt{1 \times 10} = 3.1622777$

假數　$0 - y = y - 1$　　　$y = \frac{0+1}{2} = 0.50$

$$\therefore \quad \log 3.1622777 = 0.50$$

"今雖無第一率之假數,而苟得其折半第幾次之假數,則加倍幾次,必得第一率之假數.故以加倍第幾次之率數,與折半第幾次之假數相乘,卽得第一率之假數也."

累次乘數	率　數	累次乘數	率　數
1	2	26	67108864
2	4	27	134217726
3	8	28	268435456
4	16	29	536870912
5	32	30	1073741824
6	64	31	2147483648
7	128	32	4294967296
8	256	33	8589934592
9	512	34	17179869184
10	1024	35	34359738368
11	2048	36	68719476736
12	4096	37	137438953472

13	8192	38	274877906944
14	16384	39	549755813888
15	32768	40	1099511627776
16	65536	41	2199023255552
17	131072	42	4398046511104
18	262144	43	8796093022208
19	524288	44	17592186044416
20	1043576	45	35184372088832
21	2097152	46	70368744177664
22	4194304	47	140737488355328
23	8388608	48	281474976710656
24	16777216	49	562949953421312
25	33554432	50	1125899906842624

(c) "凡眞數不可與假數爲比例者，因眞數開方，假數折半，其相比之分數不同，若開方至於數十次，則開方之數，卽與折半之數相同"，如前"用中比例求假數法"，并參下表知10在第二十一次以下，開方之數，已與折半之數相同.

或 $10^{1/2^{(n+1)}}=\sqrt{1+E_n}=1+\frac{1}{2}E_n$ 時，則 $\log 10^{1/2^{(n+1)}}$

$$=\log(1+E_n)^{1/2}=\log\left(1+\frac{1}{2}E_n\right)={}^{1}\!/_{2}(n+1).$$

又因 $10^{1/2^{(n+1)}}=1+E_{n+1}$，則 $\frac{1}{2}E_n : {}^{1}\!/_{2}(n+1)$

$$=E_{n+1} : {}^{1}\!/_{2}(n+1)=1 : \mu.$$

如 $10^{1/2^{64}}=\sqrt{1+0.{}^{15}_{0}2556382986400647O}$

$$=1+0.{}^{15}_{0}1278191493200323 5^{(22)}$$

$$\frac{1}{2^{64}}=0.{}^{16}_{0}5551115123125782 70.$$

則 $\dfrac{1278191493200323 5}{5551115123125782 70}=\dfrac{1000000000000000 00}{\mu=4342944819032518 04}$

即 $\log 10^{1/2^{64}}=\log\left(1+0.{}^{15}_{0}1\right)=0.{}^{16}_{0}\mu$

$$=0.{}^{16}_{0}4342944819032518 04$$

而 $\mu=434294481903251804$ 是爲對數根（或模數）.(23)

---

(22) 玆爲便利起見，應用新符號，如 $0.{}^{15}_{0}$ 謂小數點下有十五空位，他倣此，如 $0.{}^{4}_{0}58=0,000058$ 是也.

(23) 李善蘭譯代微積拾級稱爲"中[illegible]對數表根".

故"凡求假數者,皆以眞數開方至幾十次,首位第一,又得空十五位,則以其後之零數,與此所得之假數爲比例,卽得其開方第幾十次之假數.按前率數乘之,卽得第一率之假數也."

眞數遞次開方表	
	10
1	3.16227766016837933199889354
2	1.77827941003892280119730413
3	1.33352143216332402566538930 8
4	1.15478198468945817966191821 3
5	1.07460782832131749721381765 38
6	1.03663292843769799729062731 31
7	1.01815172171818184147372381 44
8	1.00903504484144743775900513 01
9	1.00450736423446251566467061 12
0	1.00225114829291291546561173 67
11	1.00112494139987987588539551 805
12	1.00056231260220863661849591 839

13	1.00028111678778013239924964325
14	1.00014054851694725816276732715
15	1.00007027128941143553881170845
16	1.00003513527746185660858130777
17	1.00001756748442267383384678274
18	1.00000878370363461214657407431
19	1.00000439184217316723628188083
20	1.00000219591867555420331707719
21	1.00000109795873502040975472940
22	1.000000548979216821114626602504
23	1.000000274489570738295091254499
24	1.000000137244775951083282695723
25	1.000000068622385621025737187482
26	1.000000034311192221882912750208
27	1.000000017155595963784719938791
28	1.000000008577797945103051175888
29	1.00000000428888963354198429013
30	1.000000002144449479377767429704

31	1.00000000107222473911405076926 8
32	1.00000000053611236941331714831 4
33	1.00000000026805618467073151508 7
34	1.00000000013402809232638399277 7
35	1.00000000006701404616094655519 6
36	1.00000000003350702307991191730 0
37	1.00000000001675351153981561857 6
38	1.00000000000837675576987272426 9
39	1.00000000000418837788492759087 9
40	1.00000000000209418894246160262 5
41	1.00000000000104709447123025311 0
42	1.00000000000052354723561498950 4
43	1.00000000000026177361780746048 9
44	1.00000000000013088680890372167 8
45	1.00000000000006544340445185697 5
46	1.00000000000003272170222592881 337
47	1.00000000000001636085111296427 283
48	1.00000000000000818042555648210 295

49	1.00000000000000409021277824104311
50	1.00000000000000204510638912051946
51	1.00000000000000102255319456025921
52	1.00000000000000051127659728012947
53	1.00000000000000025563829864006470
54	1.00000000000000012781914932003235

眞數遞次開方表	
	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125
4	0.0625
5	0.03125
6	0.015625
7	0.0078125
8	0.00390625
9	0.001953125

10	0.0009765625
11	0.00048828125
12	0.000244140625
13	0.0001220703125
14	0.00006103515625
15	0.000030517578125
16	0.0000152587890625
17	0.00000762939453125
18	0.000003814697265625
19	0.0000019073486328125
20	0.00000095367431640625
21	0.000000476837158203125
22	0.0000002384185791015625
23	0.00000011920928955078125
24	0 000000059604644775390625
25	0.0000000298023223876953125
26	0.00000001490116119384765625
27	0.000000007450580596923828125

28	0.0000000037252902984619140625
29	0.00000000186264514923095703125
30	0.000000000931322574615478515625
31	0.0000000004656612873077392578125
32	0.00000000023283064365386962890625
33	0.000000000116415321826934814453125
34	0.0000000000582076609134674072265625
35	0.0000000000291038304567337036132812
36	0.0000000000145519152283668518066406
37	0.0000000000072759576141834259033203
38	0.0000000000036379788070917129516601
39	0.0000000000018189894035458564758300
40	0.0000000000009094947017729282379150
41	0.0000000000004547473508864641189575
42	0.0000000000002273736754432320594787
43	0.0000000000001136868377216160297393
44	0.0000000000000568434188608080148696
45	0.0000000000000284217094304040074348

46	0.0000000000000142108547152020037174
47	0.00000000000000710542735760100185870
48	0.00000000000000355271367880050092935
49	0.00000000000000177635683940025046467
50	0.000000000000000888178419700125232338
51	0.000000000000000444089209850062616169
52	0.000000000000000222044604925031308085
53	0.000000000000000111022302462515654042
54	0.0000000000000000555111512312578270211

(*d*) 如求 log 2, 先令 $2^{10}=1024$. 又令 10^3 除之得 1.024.

此時首位已爲1,乃如前例開方四十七次,卽得1下有十五空位之數.

$$1.024^{1/2^{47}}=1.\overset{15}{0}16851605705394977$$

如前比例,反求之, $1:\mu=16851605705394977:x$.

$$\therefore\qquad x=7318559369062392\,68,$$

或

$$\log(1.024)^{1/2^{47}}=0.\overset{16}{0}731855936906239268,$$

如前率數表,

$$\log (1.024)^{1/2^{47}} = \log 1.024^{1/2^{47}}$$

$$= \log 1.024^{\frac{1}{140737488355328}}$$

$$\therefore \quad \log 1.024 = 140737488355328 \times 0.{}^{16}_{0}7318559369062392 68$$

$$= 0.010299956639811952 65^{(24)}$$

而 $$\log 1024 = 3.010299956639811952 65 = \log 2^{10}$$

$$\therefore \quad \log 2 = \frac{1}{10} \times \log 1024$$

$$= 0.301029995663981195265.$$

(e) "凡求假數,眞數開方之次數愈多,則所得之假數愈密.然用假數不過至十二位,……故眞數開方至二十七次,即可以立率."

因 $$\log 10^{1/2^{34}} = 0.{}^{9}_{0}1340280923263839927 77.$$

---

(24) 其證詳李譯代數學卷十二,即

$$\log_e a = \frac{a^x - 1}{x}, \quad 或 \quad \log_e z = \left(z^{\frac{1}{2^{47}}} - 1\right) \times 2^{47}$$

$$\tfrac{1}{2^{34}} = 0.{}^{10}_{0}58207660913467407226565.$$

而 $$\frac{134028092326383992777}{58207660913467407 2265} = \frac{1000000000000000000000000}{\beta = 434294481874147997206955}.$$

又 $$\log (1.024)^{1/2^{27}} = 0.{}^{9}_{0}167018930501419482 62$$

$$1 : \beta = 167018\cdots\cdots 8262 : x,$$

$$x = 7674065709137708907 01439$$

$$\log (1.024)^{1/2^{27}} = 0.{}^{10}_{0}7674065709137708907 01439$$

$$\therefore \qquad \log 2 = 0.3010299956640$$

"此法較之前法,開方省二十次,而所得之數同,故求假數者,用此法亦便也."

(*f*) "凡開方之數,與折半之數雖不同,然而不同之較,遞次漸少.故又有相較之法.至開方第十次以後,則以較數相減,卽得開方之數."

如求 log 6, 如前 (*d*) 例, 先令 $6^9 = 10077696$, 又令 10^7 除之得 1.0077696, 此時首位已爲 1.逐次開方十一次, 其每次之商以 $a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots\cdots, a_{11}$ 表之, 其值如下:

		1.0077696
$a_1=1+E_1$	1	1.00387728333696245663846551
$a_2=1+E_2$	2	1.00193676613694661675870229
$a_3=1+E_3$	3	1.00096791463909901728890720
$a_4=1+E_4$	4	1.00048384026884662985492535
$a_5=1+E_5$	5	1.00024189087882468563808727
$a_6=1+E_6$	6	1.00012093812639713459439194
$a_7=1+E_7$	7	1.00006046723505530968016005
$a_8=1+E_8$	8	1.00003023316050565775964794
$a_9=1+E_9$	9	1.00001511646599905672950488
$a_{10}=1+E_{10}$	10	1.00000755820443630121429076
$a_{11}=1+E_{11}$	11	1.00000377909507737080524125

其"第五次開方",1下空位E_5,"與第四次開方所得(E_4)折半之數漸近",故令

$$第5次之較=\frac{E_4}{2}-E_5=d_5$$

$$\begin{cases}第6次之一較=\dfrac{E_5}{2}-E_6=d_{6,1}\\ 第6次之二較=\dfrac{d_5}{4}-d_{6,1}=d_{6,2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} 第7次之一較 = \frac{E_6}{2} - E_7 = d_{7,1} \\ 第7次之二較 = \frac{d_{6,1}}{4} - d_{7,1} = d_{7,2} \\ 第7次之三較 = \frac{d_{6,2}}{8} - d_{7,2} = d_{7,3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 第8次之一較 = \frac{E_7}{2} - E_8 = d_{8,1} \\ 第8次之二較 = \frac{d_{7,1}}{4} - d_{8,1} = d_{8,2} \\ 第8次之三較 = \frac{d_{7,2}}{8} - d_{8,2} = d_{8,3} \\ 第8次之四較 = \frac{d_{7,3}}{16} - d_{8,3} = d_{8,4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 第9次之一較 = \frac{E_8}{2} - E_9 = d_{9,1} \\ 第9次之二較 = \frac{d_{8,1}}{4} - d_{9,1} = d_{9,2} \\ 第9次之三較 = \frac{d_{8,2}}{8} - d_{9,2} = d_{9,3} \\ 第9次之四較 = \frac{d_{8,3}}{16} - d_{9,3} = d_{9,4} \\ 第9次之五較 = \frac{d_{8,4}}{32} - d_{9,4} = d_{9,5} \end{cases}$$ (25)

此時 $d_{9,5}=0$, 故 $\frac{d_{8,4}}{32}=d_{9,4}$, "故自第十次以後, 則不

(25) 說明見傅九淵有不爲齋算學卷三"對數表開方用較省算法解".

用開方," 令第10次之四較 $=\frac{d_{9,4}}{32}=d_{10,4}$,

由此逆推之,得;

$$\begin{cases}\text{第10次之四較}=\frac{d_{9,4}}{32}={}_{10,4}.\\ \text{第10次之三較}=\frac{d_{9,3}}{16}-d_{10,4}=d_{10,3}\\ \text{第10次之二較}=\frac{d_{9,2}}{8}-d_{10,3}=d_{10,2}\\ \text{第10次之一較}=\frac{d_{9,1}}{4}-d_{10,2}=d_{10,1}.\end{cases}$$

同理

$$\begin{cases}\text{第11次之四較}=\frac{d_{10,4}}{32}=d_{11,4}\\ \text{第11次之三較}=\frac{d_{10,3}}{16}-d_{11,4}=d_{11,3}\\ \text{第11次之二較}=\frac{d_{10,2}}{8}-d_{11,3}=d_{11,2}\\ \text{第11次之一較}=\frac{d_{10,1}}{4}-d_{11,2}=d_{11,1}.\end{cases}$$

而 $E_{11}=\frac{E_{10}}{2}-d_{11,1}$, 又 $a_{11}=1+E_{11}$

逐次如是,得 $a_{23}=1.\overset{9}{\underset{0}{}}92262889104307667$

$$=1.0077696^{1/2^{23}}$$

如前 (e) 例, $1:\beta=922628\cdots\cdots7667:x$

$$x=400692636197652$$

$$\log(1.0077696)^{1/2^{23}}=0.\overset{10}{0}400692636197652$$

$$\log 10077696=7+2^{23}\times 0.\overset{10}{0}400692636197652=\log 6^9.$$

$$\therefore\quad \log 6=0.77815125038$$

(g) 凡求假數,先求得 $1-9$, $11-19$, $101-109$, $1001-1009$, $10001-10009$, ……, $1000000001-1000000009$ 九十九數之假數,而他數皆由此生.然此九十九數內,有以兩數相乘除而得者,則以兩假數相加減.數理精蘊表卷三……六,有對數闡微,即示某數之相乘因子.就中無他數爲因子者,謂之數根.如 $1-9$ 中之 2, 3, 7 可按前"用遞次開方求假數法"求之.至 1000001 以後,則又可用前遞次開方表內相近之數,比例而得之.

如求 $\qquad \log 1.000001$

因 $\quad 10^{1/2^{21}}=1+0.\overset{5}{0}1097958735,\ \dfrac{1}{2^{21}}=0.\overset{6}{0}4768371582\cdots\cdots$

$\therefore\quad 109758735:476837158=1:x,\quad x=4342943\cdots\cdots$

則 $$\log 1.000001=0.\overset{6}{0}4342943$$

$$\log 1.000002=2x=0.\overset{6}{0}86859$$

$$\log 1.000003=3x=0\overset{5}{0}130286.$$

次如前說,因

$$10^{1/2^{19}}=1+0.\overset{5}{0}4391842173,\ \frac{1}{2^{19}}=0.\overset{5}{0}1907348632$$

$$\therefore\quad 4391842173:1907348632=1:x,\quad x=17371740,$$

則 $$\log 1.000004=0.\overset{5}{0}17371740,$$

$$\log 1.000005=\frac{5}{4}x=0.\overset{5}{0}217147,$$

$$\log 1.000006=\frac{6}{4}x=0.\overset{5}{0}260576.$$

同理 $\log 1.000007$ 如前求得 x, 則 $\log 1000008=\frac{8}{7}x$, $\log 1000009=\frac{9}{7}x$, 至於 1.0000001 以後之假數, 幷不用比例, 因 $\left(1+0.\overset{5}{0}1\right)=0.\overset{6}{0}4342943$

又由 (c) 知 $$\log\left(1-0.\overset{5}{0}1\right)=0.\overset{16}{0}4342944$$

則其間可用歸納法, 得

$$\log\left(1+0.\overset{6}{0}1\right)=0.\overset{7}{0}434294$$

$$\log\left(1+0.\overset{7}{0}1\right)=0.\overset{8}{0}434294$$

....

其九十九數之眞數假數如下表:

眞數	假數	眞數	假數
1	0	1001	000043407748
2	030102999566	1002	000086772153
3	047712125472	1003	000000093302
4	070259599133	1004	000173371281
5	069877000434	1005	000216606716
6	077815125038	1006	000259798072
7	084509804001	1007	000302947055
8	090208998699	1008	000346053211
9	095424250944	1009	000389116624
11	004135268516	10001	000004342728
12	007918124605	10002	000008685021
13	011394335231	10003	000013026881
14	014612805568	10004	000017568306
15	017609125506	10005	000021709297
16	020411998266	10006	000026049855
17	023044892138	10007	000030389978
18	025527250510	10008	000034729669

19	027875360095	10009	000039068925
101	000432137308	100001	000000434292
102	000860017176	100002	000000868580
103	001283722471	100003	000001302864
104	001703333930	100004	000001737143
105	002118929907	100005	000002171418
106	002530586526	100006	000002605689
107	002938377769	100007	000003039955
108	003342375549	100008	000003474217
109	003742649764	100009	000003908474

眞數	假數	眞數	假數
1000001	000000043429	100000006	000000002606
1000002	000000086859	100000007	000000003040
1000003	000000130288	100000008	000000003474
1000004	000000173717	100000009	000000003909
1000005	000000217147	1000000001	000000000043
1000006	000000260576	1000000002	000000000087

1000007	000000304005	1000000003	000000000130
1000008	000000347434	1000000004	000000000174
1000009	000000390863	1000000005	000000000217
10000001	000000004343	1000000006	000000000261
10000002	000000008686	1000000007	000000000304
10000003	000000013029	1000000008	000000000347
10000004	000000017372	1000000009	000000000391
10000005	000000021715	10000000001	000000000004
10000006	000000026058	10000000002	000000000009
10000007	000000030401	10000000003	000000000013
10000008	000000034744	10000000004	000000000017
10000009	000000039086	10000000005	000000000022
100000001	000000000434	10000000006	000000000026
100000002	000000000869	10000000007	000000000030
100000003	000000001203	10000000008	000000000035
100000004	000000001737	10000000009	000000000039
100000005	000000002171		

又(4)"用九十九求他假數法",

如下各例之數,爲 a, b, c 各數所組成,則其假數可以加減乘得之,如:

$$\log N=\log 10^n\times a=10^n\log a$$

$$\log N=\log a\times b=\log a+\log b$$

$$\log N=\log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$$

又 $\log N=\log a\,b\,c=\log a+\log b+\log c$, 而 $a>b>c$.

$\log 20703=\log 20000\times 1.005\times 1.03=\log 20000+\log 1.005$
$+\log 1.03=4.31603328213$

反求之,則 $4.31603328213-\log 20000-$
$\log 1.005-\log 1.03=0$

$\therefore$ $4.31603328213=\log 20703.$

此義更擴張之,以求任意數,如求 log 23,"則以所知前位之整數累除之.除得累乘之眞數,則以其假數累加之,即得所求之假數."玆舉例以見之.

求 log 5689:

$\dfrac{\text{原實 }5689}{\text{一法 }5600}=1.01$ (一商) 餘 23	令 N 爲原實,
$5689-33=5656$ (二法	則 $\dfrac{N}{r}=q_1+\dfrac{d_1}{r}$.
$=5600\times 1.01$	$N-d_1=rq_1$

$\frac{\text{原實}\ 5689}{\text{二法}\ 5656}=1.005$ (二商) 餘 4.72	$\frac{N}{N-d_1}=q_2-\frac{d_2}{N-d_1}$
$5689-4.72=5684.28$ (三法)	$N-d_2=(N-d_1)q_2$
$=5656\times1.005$	$=rq_1q_2$
$\frac{\text{原實}\ 5689}{\text{三法}\ 5684.28}=1.0008$ (三商) 餘 0.172576	$\frac{N}{N-d_2}=q_3-\frac{d_3}{N-d_2}$
$5689-0.172576=5688.827424$ (四法) $=5684.28\times1.0008$	$N-d_3=(N-d_2)\times q_3$ $=rq_1q_2q_3$
$\frac{\text{原實}\ 5689}{\text{四法}\ 5688.827424}=1.00003$ (四商) 餘 0.00191117728	$\frac{N}{N-d_3}=q_4-\frac{d_4}{N-d_3}$
$5689-0.00191117728$ $=5688.998089$ (五法)	$N-d_4=(N-d_3)\times q_4$ $=rq_1q_2q_3q_4$.
逐次如是,至餘數幾等於零,即	....
八法 $=5688.999995$	$\frac{N}{N-d_7}=q_8-\frac{d_8}{N-d_7}$
八商 $=1.0000000008$	$N-d_8=(N-d_7)\times q_8$
八餘 $=0000000000$	$=rq_1q_2q_3\cdots\cdots q_8$

log 5689	因 $d_8=0$
$=\log 5600\times1.01\times1.005\times1.0008$	$\therefore\quad N=rq_1q_2q_3\cdots\cdots q_8.$
$\times1.00003\times1.0000003$	$\log N=\log r+\log q_1$
$\times1.0000003\times1.000000003$	$+\log q_2$
$\times1.0000000003$	$+\cdots\cdots$
$=3.75503593371$	$+\log q_8.$

最後言"求八線對數"及"對數用法"焉. 其對數表具小數十位.

清, 年希堯面體比例便覽(雍正十三年, 1735 自序) 稱: "夫假數者乃數學家之超法也, 其詳見數理精蘊中. 但其數加之則代乘, 減之則代除, 兩分之則開平方, 三分之則開立方, 四分之則開三乘方, 等而推之, 皆可爲也, 不亦超法乎?"

(4) 陳杰算法大成上編(道光二十四年, 1844 金望欣序, 光緒戊戌(1898) 浙江官書局重刊) 卷四, 言: "對數", 蓋稗販數理精蘊之說也.

10. 對數簡法,續對數簡法,假數測圓

(5) 粵雅堂叢書刻本戴煦(1805–1860)求表捷術咸豐壬子(1852)自序稱"自道光乙巳(1845)至今歲,凡八易寒暑,演錄始竣."其中對數簡法二卷,前有道光乙巳(1845)項名達序,及戴煦自識.續對數簡法一卷,前有道光丁未(1847)項名達序,及丙午(1846)戴煦自識.假數測圓二卷,前有咸豐壬子(1852)戴煦自序,及咸豐丙辰(1856)夏鸞翔序.以上三書并論及對數.

對數簡法(1845)卷上"開方七術","求開方表",蓋因舊法開方,事涉繁重,因以二項式求之.

如 $N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}A\cdot\frac{Q}{P}\mp\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}\pm\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}\mp\cdots\cdots。$$

$N^m=(P+Q)^m$

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{P+1}$$

$$-\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\cdots\cdots.$$

$N^m=(P+Q)^m$

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{N}+\frac{m+1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{2}$$

$$-\frac{m+2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{N}+\cdots\cdots.$$

又 $N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}-\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots.$$

其所設開方表卽由此而得.開方表中右行爲[illegible]數,左行爲假數之分子,而2099152爲公分母,如

$$\log 3.1622\cdots\cdots1684=\frac{1048576}{2099152},$$

$$\log 1.0001\cdots\cdots5169=\frac{128}{2099152},$$ 是也.

率	次	眞數
2099152		10.
1048576	1	3.1622776601684
524288	2	1.7782794100389
262144	3	1.3335214321633
131072	4	1.1547819846895
65536	5	1.0746078283213

32768	6	1.0366329284377
16384	7	1.0181517217182
8192	8	1.0090350448414
4096	9	1.0045073642545
2048	10	1.0022511482929
1024	11	1.0011249413999
512	12	1.0005623126022
256	13	1.0002811167878
128	14	1.0001405485169
64	15	1.0000702717894
32	16	1.0000351352775
16	17	1.0000175674844
8	18	1.0000087837036
4	19	1.0000043618422
2	20	1.0000021959187
1	21	1.0000010979587

又(1)"有開方表徑求諸對數"

$$\log 2=\log 1.7782\cdots\cdots389\times\frac{2}{1.7782\cdots389}$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.1246826503807$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times\frac{1.1246826503807}{1.0746\cdots\cdots213}$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times1.0465982293630$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times1.0366\cdots\cdots377\times\frac{1.0465982293630}{1.0366\cdots\cdots377}$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times1.0366\cdots\cdots377\times1.0096131433335$$

$$=\log 1.778\cdots89\times1.074\cdots13\times1.036\cdots377\times1.0090\cdots414\times\frac{1.0096131433335}{1.0090\cdots\cdots414}$$

逐次如是,得;

$$\log 2=\log 1.778\cdots89\times1.074\cdots13\times1.036\cdots77\times1.0090\cdots414\times1.0005623126022\times1.0000087837036\times1.0000010979589\times\frac{1.0000018198300}{1.0000010979587}(=1.000000721870)$$

$$=\frac{1}{2097152}\left[524288+65536+32768+8192+512+8+1+\frac{721870}{10979587}(=0.6574660)\right]$$

$=0.801029995663$. 其末位因在1以下,故以比例得之.

又(2)"不用開方表求諸對數"

數理精蘊用九十九求他假數，戴氏則主張用 1－9，至 10000001－10000009 之七十二數，已經足用．其求七十二數，亦不用數理精蘊之"用中比例，用遞次自乘，用遞次開方"各法，惟用假設對數之法，其假設對數卽自然對數也．

先假設 (a) $\log_e 1.\overset{6}{0}1 = 1.\overset{6}{0}1$

則 $\log_e 1.\overset{6}{0}2 = \log_e\left(1.\overset{6}{0}1 \times \dfrac{1.\overset{6}{0}2}{1.\overset{6}{0}1}\right)$

$$= \log_e\left(1.\overset{6}{0}1 \times 1.\overset{7}{0}9999999\right)$$

$$= 1.\overset{6}{0}1999999999.$$

又 $\log_e 1.\overset{6}{0}3 = \log_e\left(1.\overset{6}{0}1999999999 \times \dfrac{1.\overset{6}{0}3}{1.\overset{6}{0}1999999999}\right)$

$$= \log_e\left(1.\overset{6}{0}1999999999 \times 1.\overset{7}{0}9999997\right)$$

$$= 2.\overset{6}{0}29999997.$$

逐次如是，至於 $\log_e 1.\overset{6}{0}9$

(*b*) 次求 $\log_e 1.\overset{5}{0}1$ 則如上例得

$\log_e 1.\overset{5}{0}1 = 1.\overset{6}{0}99999955$, 其 $\log_e 1.\overset{5}{0}2$ 以下, 則用二次除法, 如:

$$\log_e 1.\overset{5}{0}2 = \log_e\left[1.\overset{5}{0}1 \times \frac{1.\overset{5}{0}2}{1.\overset{5}{0}1}\left(=1.\overset{6}{0}99999900\right)\right]$$

$$= \log_e\left[1.\overset{5}{0}1 \times 1.\overset{6}{0}9 \times \frac{1.\overset{6}{0}99999900}{1.\overset{6}{0}9}\right.$$

$$\left.\left(=1.\overset{7}{0}9999891\right)\right] = 1.\overset{5}{0}199999810.$$

逐次如是, 至於 $\log 1.\overset{5}{0}9$ 均用二次除法,其 $1.\overset{4}{0}2$ 以下, 用三除法, $1.\overset{3}{0}2$ 以下, 用四除法, $1.\overset{2}{0}1$ 以下, 用五除法, $1.\overset{1}{0}2$ 至 $1.\overset{1}{0}9$ 以及 1.1, 用六除法, 1.2 至 1.9 用七除法.

因得　　假設對數 $\log_e 2 = 0.69314721517968$

　　　　假設對數 $\log_e 10 = 2.30258520799943$

以 $\log_e 10$ 爲除法, 除逐數之假設對數, 卽得其定率對數.

如　$\log 2 = \frac{1}{\log_e 10} \times \log_e 2 = 0.301029995664$ 是也.

又(3)"有七十二對數,求諸對數"

如 $\log 5689=\log(10^3\times 5.689)=\log\left[10^3\times 5\times\frac{5.689}{5}(=1.1378)\right]$

$$=\log\left[10^3\times 5\times\frac{5.689}{5}(=1.1378)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times\frac{1.1378}{1.1}(=1.0343636363636)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times 1.03\times\frac{1.0343636363636}{1.03}\right.$$

$$\left.(=1.0042365401589)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times 1.03\times 1004\times\frac{1.0042365401589}{1.004}\right.$$

$$\left.(=1.0002355977678)\right]$$

....

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times 1.03\times 1.004\times 1.\overset{3}{0}2\times 1.\overset{4}{0}3\times 1.\overset{5}{0}5\right.$$

$$\left.\times 1.\overset{6}{0}5\times\frac{1.\overset{6}{0}5904790}{1.\overset{6}{0}5}\left(=1.\overset{7}{0}904790\right)\right]$$

其末項 $\log 1.\overset{7}{0}904790$ 由 $\log 1.\overset{6}{0}1=0.\overset{7}{0}43429$ 比例而得 $0.\overset{3}{0}39294$.

故 $$\log 5689=\log 10^3+\log 1.1+\cdots\cdots+\log 1.\overset{6}{0}5$$
$$+0.\overset{3}{0}39294$$
$$=3.755035933768.$$

戴氏并因此義,以求 $\log(n+1)$,其 $\log n$ 爲已知,如已知 $\log 36$ 求 $\log 37$,因 $\log\dfrac{n+1}{n}=\log\dfrac{37}{36}=\log 37-\log 36.$

故 $$\log 37=\log 36+\log\Big(1.02\times1.007\times1.\overset{3}{0}6\times1.\overset{4}{0}2$$
$$\times1.\overset{6}{0}9\times1.\overset{7}{0}132839\Big)$$
$$=\log 36+\log 1.02+\log 1.007+\cdots\cdots$$
$$+\log 1.\overset{6}{0}9\ +0.\overset{8}{0}5769$$
$$=1.568201724068.$$

續對數簡法 (1846) 卷首列"以本數爲積,求折小各率四術"及"以本數爲根,求倍大各率四術".

其"求對數根",因對數根卽 $\log 1.\overset{n}{0}1$. 數理精蘊舊法由五十四次開方比例而得.

茲因 $10^{\frac{1}{32}}=1.074607828321317497=1+m$ 稱爲用數,

$\dfrac{1+m}{m}=14.4034192188686539=n$ 稱爲除法,

$$\mu = 1 \div \frac{32}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots\cdots\right)$$

$$= 1 \div 2.302585092994045\underline{77}$$

$$= 0.43429448190325181\underline{1}$$

蓋戴煦本項名達"以本數爲積,求折小各率,第一術",

$$N^{\frac{1}{n}} = (P \pm Q)^{\frac{1}{n}} = P^{\frac{1}{n}} \pm \frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N} + \frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N} \pm \frac{2n+1}{3n}$$

$$\cdot C\cdot\frac{Q}{N} + \frac{3n+1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N} \pm \cdots\cdots.$$

而 A 爲第一數,B 爲第二數,C 爲第三數,以下同此,n 爲率分.戴氏謂 n 爲極大時,則 $n+1$ 與 n 約略相等,$2n+1$ 與 $2n$;與 $3n+1$ 與 $3n$ 亦約略相等,故上式可化爲:

$$N^{\frac{1}{n}} = (P+Q)^{\frac{1}{n}} = P^{\frac{1}{n}} \pm \frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N} + \frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{N} \pm \frac{2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}$$

$$+ \frac{3}{4}\cdot D\cdot\frac{Q}{N} \pm \cdots\cdots$$

如上例,$(1+m)^{\frac{1}{32}} = 1 + \frac{1}{32n}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots\right)$

惟此處, $n = \frac{1+m}{m}$.

又 $\log 10^{\frac{1}{32\times 32}} = \frac{1}{32\times 32}\log 10 = \frac{1}{32\times 32}$.

故求對數根 μ 時，如數理精蘊 (3) (c) 得

$$\mu=1\div\frac{32}{n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\right)$$

$$=0.434294481903251811 \text{ 也.}$$

其"論用數"謂欲求某數(如 N 者)之對數，當先已知對數之若干數乘之，或除之，或屢乘之，或開之，再以 10^r 除之，令成用數 $1+y$ 之形，而 y 爲小數.

即 $$\frac{nN}{10^r}=1+y, \quad \text{或} \quad N=10^r(1+y)\times\frac{1}{n},$$

$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)-\log_{10}n;$$

又 $$\frac{N}{n(10^r)}=1+y, \quad \text{或} \quad N=10^r(1+y)\times n,$$

$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)+\log_{10}n;$$

又 $$\frac{N^n}{10^r}=1+y, \quad \text{或} \quad N=\left[10^r(1+y)\right]^{\frac{1}{n}},$$

$$\log_{10}N=\frac{1}{n}\left\{r+\log_{10}(1+y)\right\};$$

又 $$\frac{N^{\frac{1}{n}}}{10^r}=1+y, \quad \text{或} \quad N=\left[10^r(1+y)\right]^n,$$

$$\log_{10}N=n\left\{r+\log_{10}(1+y)\right\}.$$

故求 $\log_{10}N$，先求其用數 $1+y$ 之對數，

因 $\log_{10}(1+y)=\mu\log_e(1+y)$ $(y=\text{小數})$

$$=\mu\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right\}$$

此與顧觀光第四術,及代數學(1859)卷十三第(1)式,微積溯源(1874)第四十二款所載相同.

就中括弧所記,蓋用其"以本數爲積,求折小各率,第二術"

$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots$$

如前例 n 爲極大時,則 $n-1$ 與 n, $2n-1$ 與 $2n$, …… 等并約略相等,故可化爲

$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots$$

又 $P=1$

故 $(1+y)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$

如上例去其首位1,與 μ 爲比例卽得.

或因 $\log(1+y)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log(1+y)$

故求對數根 μ 時,如數理精蘊(3)(c)得:

$$\mu=1\div\frac{n}{\log(1+y)}\cdot\frac{1}{n}\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{\log(1+y)}{\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)}$$

$$\therefore\quad \log(1+y)=\mu\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$$

戴氏謂"所求之用數,均位少而無畸零,(如7用數1+0.008之0.008),不惟乘法止一二位,抑且用第二術,則除法卽單一($P=1$),可以省除,故雖降法稍難,而終以第二術爲便也."

其"附對數還原"內"論借用本數",以

$$\log 1.000001=0.\overset{6}{0}4342942647562$$

爲借用本數之對數.

其"論借用率數",假如

$$\log N=1.3617278360175928784$$

求借用率數.

則 $\log N=\log 10+\log 2+\log 1.1+\log 1.04+\log 1.005$

$+\log 1.0002+\log 1.00004+\log 1.000003$

$+0.\overset{6}{0}2296151084564(-z)$.

其最後之 $0.{}^{6}_{0}2296151084564$ 未見於次 $1-9, 1.1-1.9, \cdots\cdots 1.000001-1.000009$ 表內，命之爲 z，

則
$$t=\frac{z}{\log_{10} 1.000001}$$
稱爲借用率數.

上式，按定義 $z=t.\log_{10} 1.000001=\log_{10} \overline{1.000001}^{\,t}$

而
$$\log N=\log 10+\log 2+\cdots\cdots+\log 1.000003$$
$$+\log_{10} \overline{1.000001}^{\,t}.$$

今按"以本數爲根，求倍大各率，第二術"，

$$N^m=(P+Q)^m=P^m+m\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots$$

因 $P=1,\ Q=0.000001>1$，

故 $(1.0[illegible]1)^t=1+(0.000001)t-\frac{1}{2}(0.000001)^2 t(1-t)-$

$-\frac{1}{[illegible]}(0.000001)^3 t(1-t)(2-t)-\cdots\cdots$

[illegible]87[illegible]4656192.

[illegible] $N=1$[illegible]$\times 1.005\times 1.0002\times 1.00004$

[illegible]$.{}^{6}_{0}$[illegible]987084656192.

$=2$[illegible].

眞數	假數　小餘
2	0.3010299956639811949
3	0.4771212547196624371
4	0.6020599913279623898
5	0.6989700043360188051
6	0.7781512503836436320
7	0.8450980400142568822
8	0.9030899869919435847
9	0.9542425094393248742
1.1	0.0413926851582250417
1.2	0.0791812460476248269
1.3	0.1139433523068367696
1.4	0.1461280356782480271
1.5	0.1760912590556812422
1.6	0.2041199826559247796
1.7	0.2304489213782739278
1.8	0.2552725051033060691

1.9	0.2787536009528289619
1.01	0.0043213737826425665
1.02	0.0086001717619175598
1.03	0.0128372247051722046
1.04	0.0170333392987803543
1.05	0.0211892990699380744
1.06	0.0253058652666841264
1.07	0.0293837776851096402
1.08	0.0334237554869497012
1.09	0.0374264979406236338
1.001	0.0004340774793186407
1.002	0.0008677215312269125
1.003	0.0013009330204181186
1.004	0.0017337128090005297
1.005	0.0021660617565076762
1.006	0.0025979807199086122
1.007	0.0030294705536180070
1.008	0.0034605321095064860

1,009	0.0038911662369105216
1.0001	0.0000434272768626696
1.0002	0.0000868502116489572
1.0003	0.0001302688052270609
1.0004	0.0001736830584649187
1.0005	0.0002170929722302082
1.0006	0.0002604985473903469
1.0007	0.0003038997848124919
1.0008	0.0003472966853635408
0.0009	0.0003906892499101310
1.00001	0.0000043429231043084
1.00002	0.0000086858027806263
1.00003	0.0000120286390284893
1.00004	0.0000173714318498092
1.00005	0.0000217141812451551
1.00006	0.0000260568872153969
1.00007	0.0000303995497613986
1.00008	0.0000347421688840333

1.00009	0.0000390847445841675
1.000001	0.0000004342942647562
1.000002	0.0000008685880952187
1.000003	0.0000013028814913885
1.000004	0.0000017371744532664
1.000005	0.0000021714669808533
1.000006	0.0000026057590741501
1.000007	0.0000030400507331577
1.000008	0.0000034743419568767
1.000009	0.0000039086327483083

假數測圓卷之上有"求負算對數"二術,蓋求不滿單一之眞數.

如 (1), $\log_{10} 0.98 = \log_{10}(1-0.02) = \mu \log_e (1-0.02)$

$$= \mu\left\{-0.02 - \frac{(0.02)^2}{2} - \frac{(0.02)^3}{3} - \frac{(0.02)^4}{4} - \cdots\cdots\right\}$$

$$= -0.00877392431.$$

而 $\log 98 = 2 + \log 0.98 = 1.99122607569.$

就中括弧內所記,蓋用續對數簡法內"以本數爲積,求折小各率,第三術"

$$N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$-\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\frac{3n-1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots$$

又　$P=1,\quad Q=0.02$

如前例去其首位1,與μ爲比例卽得.

上式與代數學卷十三,第(2)式相同.

又如(2),　$\log_{10}0.98=\log_{10}(1-0.02)=\mu\log_e(1-0.02)$

$$=\mu\left\{-\frac{0.02}{0.98}+\frac{1}{2}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$

$$=0.00877392431.$$

就中括弧內所記,蓋用續對數簡法內"以本數爲積,求折小各率,第四術"

$$N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

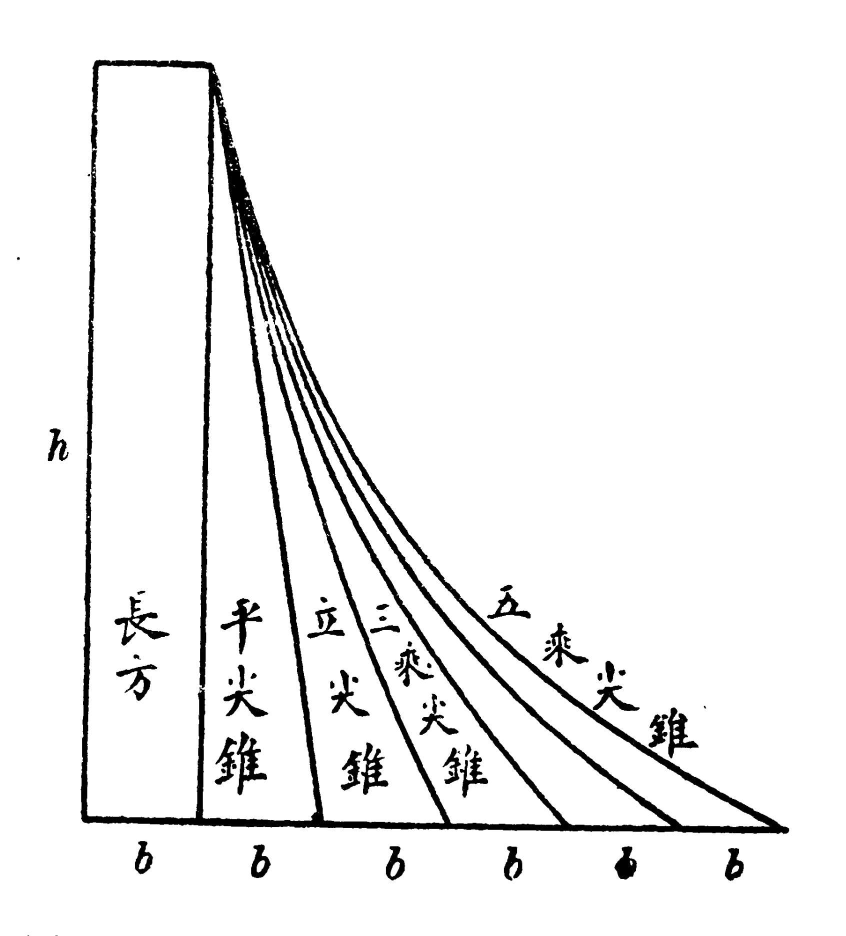
$$-\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\cdots\cdots$$

又　$P=1,\quad Q=0.02.$

如前例去其首位1與μ爲比例卽得.

11. 方圓闡幽，弧矢啟祕，對數探源

李善蘭著方圓闡幽，弧矢啟祕，對數探源三書，不題著作時代。道光丙午(1846)顧觀光序四元解，對數探源，其於四元解序稱李君又有弧矢啟祕。觀此則諸書約成於道光丙午(1846)。



方圓闡幽第七條，第八條謂平尖錐第一層一，第二層二，第三層三；立尖錐第一層一，第二層四，第三層九，由平方疊之；三乘尖錐第一層一，第二層八，

第三層二十七,由立方疊之;四乘尖錐第一層一,第二層十六,第三層八十一,由三乘方疊之,……,而以高乘底爲實,本乘方數加一爲法除之,得尖錐積.

原書不言其故,玆補證之:

如　長方,　$S_h^0=hb$,

　平尖錐,　$S_h^1=\frac{1}{2}hb$, 觀圖自明.

又　立尖錐,　$S_h^2=\frac{1}{3}hb$,

因

$$S_h^2=\frac{1}{2}\left\{\left[b\left(1-\frac{h}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{h-1}{h}\right)^2\right]\right.$$

$$+\left[b\left(1-\frac{h-1}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{h-2}{h}\right)^2\right]$$

$$+\cdots\cdots+\left[b\left(1-\frac{2}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{1}{h}\right)^2\right]$$

$$\left.+\left[b\left(1-\frac{1}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{0}{h}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{b}{h^2}\left(0^2+1^2+1^2+2^2+\cdots\cdots+\overline{h-2}^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\overline{h-1}^2+\overline{h-1}^2+h^2\right)\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^2}\left\{2[1^2+2^2+\cdots\cdots+h^2]-h^2\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^2}\left(\frac{2h^3+h}{3}\right)$$

$$=\frac{hb}{3}+\frac{b}{6h}$$ 若 h 爲極大, b 爲極小, 則此式第二項可去之.

得 $$S^2_{h=\infty}=\frac{1}{3}hb.$$

又 三乘尖錐, $S^3_h=\frac{1}{4}hb.$

同理 $$S^3_h=\frac{b}{2h^2}\left\{2[1^3+2^3+\cdots\cdots+h^3]-h^3\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^3}\left(\frac{2h^4+2h^2}{4}\right)$$

$$=\frac{hb}{4}+\frac{b}{4h}.$$ 得 $$S^3_{h=\infty}=\frac{1}{4}hb.$$

又 四乘尖錐. $S^4_h=\frac{1}{5}hb.$

同理 $$S^4_h=\frac{b}{2h^4}\left\{2[1^4+2^4+\cdots\cdots+h^4]-h^4\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^4}\left(\frac{2h^5}{5}+\frac{2h^3}{3}-\frac{h}{15}\right)=\frac{hb}{5}+\frac{b}{3h}-\frac{b}{30h^3}.$$

若 h 爲極大, b 爲極小, 則此式第二項以下可去之, 得

$$S^4_{h=\infty}=\frac{1}{5}hb.$$

又 五乘尖錐，$S_h^5=\frac{1}{6}hb.$

同理
$$S_h^5=\frac{b}{2h^6}\left\{2[1^5+2^5+\cdots\cdots+h^5]-h^5\right\}$$
$$=\frac{b}{2h^6}\left\{\frac{2h^6}{6}+\frac{5h^4}{6}-\frac{h^2}{6}\right\}=\frac{hb}{6}+\frac{5b}{12h}-\frac{b}{12h^3}.$$

得
$$S_{h=\infty}^5=\frac{hb}{6}.$$

按歸納法，$S_{h=\infty}^m=\frac{hb}{m+1}.$

原書因無證法，故頗爲人所懷疑；吳起潛稱：“李壬叔……浸淫於尖錐，其所著方圓闡幽，弧矢啟祕，對數探源，……所據之理論，頗有闕而未完者.”(26)

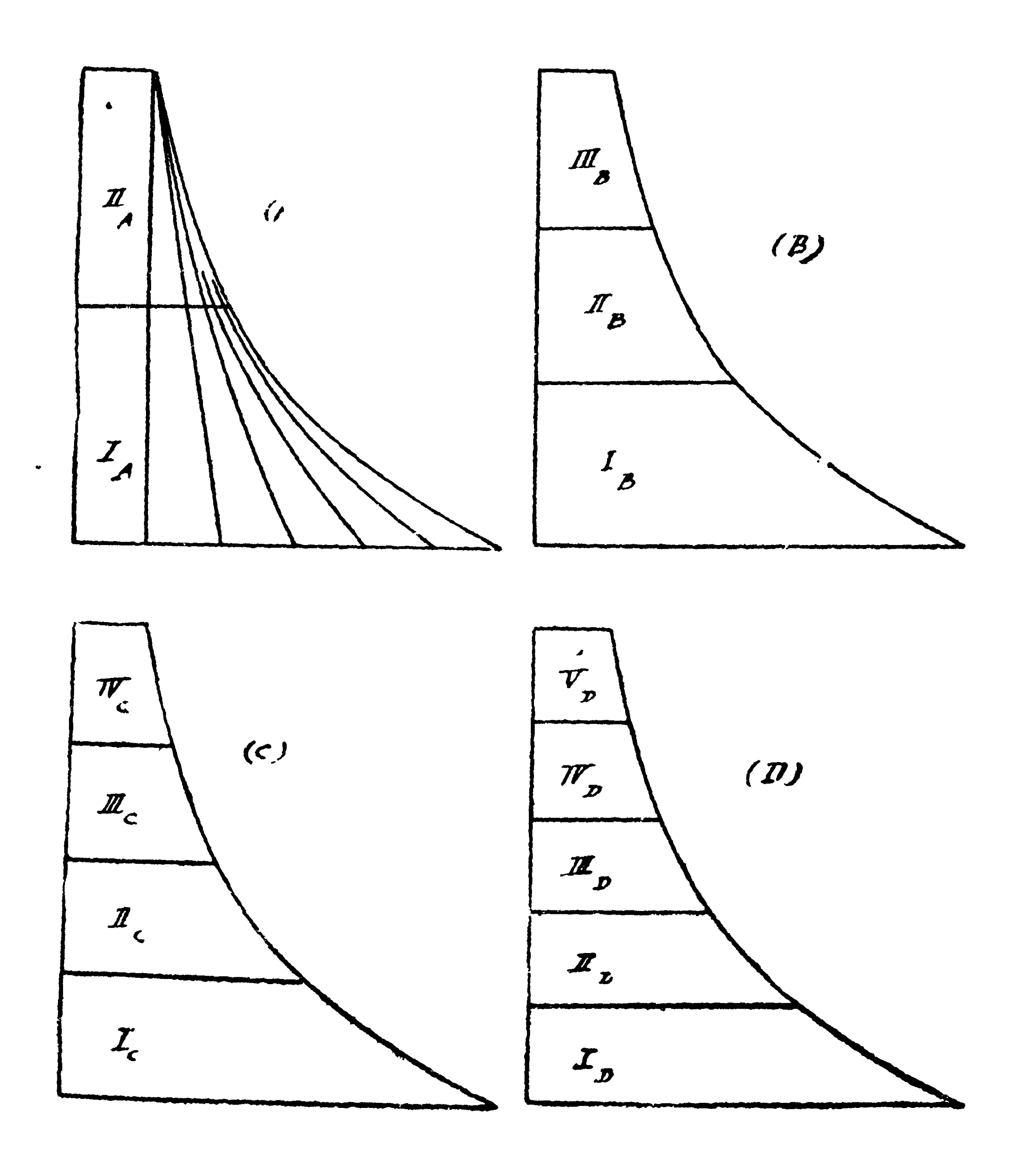
龔銘鳳稱：“或問李壬叔先生，子獨不信其尖錐之理，余頗疑之，請聞其說. 曰：級數有合於尖錐，而尖錐不可以釋級數，蓋已有級數，可強以尖錐解之，未有級數，終難以尖錐得之，故李氏之說不足憑信也.”(27)

李善蘭於對數探源卷一謂：“此尖錐合積，無論

(26) 見吳起潛：李氏方圓闡幽拾遺，光緒丙午(1906)文明書局印本.

(27) 見龔銘鳳：雜學答問，光緒二十四年(1898)上海書局印本.

截爲幾段,自最下第二段以上,其積皆同.”如截圖 A 爲二段,B 爲三段,C 爲四段,D 爲五段,則 $II_A=II_B=II_C=II_D$; $III_B=III_C=III_D$, $IV_C=IV_D$ 是也.



蓋如 (D), 則 $S^{\frac{4}{5}}=S^{\frac{m-1}{m}}=II_D+III_D+IV_D+V_D.$

$$=hb\left\{1.\frac{m-1}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-1}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right\}(1)$$

又如 (C), 則 $S^{\frac{3}{5}}=S^{\frac{m-2}{m}}=II_C+III_C+IV_C.$

$$=hb\left\{1.\frac{m-2}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-2}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-2}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-2}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right\}(2)$$

如 $hb=1$, 則 (1) 式爲 $\log_e\frac{m}{1}=\log_e m-\log_e 1,$

(2) 式爲 $\log_e\frac{m}{2}=\log_e m-\log_e 2.$

兩式相減得 $\log_e 2-\log_e 2-\log_e 1=II_D$, 而 $\log_e 1=0$. 故 $II_D=\log_e 2.$

就中 m 爲任何數, $II=\log_e 2$ 并爲眞, 卽 $II_A=II_B=II_C=II_D$ 也, 餘倣此.

對數探源卷二"詳法", 先求二十尖錐汎積, 令 $hb=1$, 其 $\frac{1}{2}hb$, $\frac{1}{3}hb$ 等, 列於汎積表.

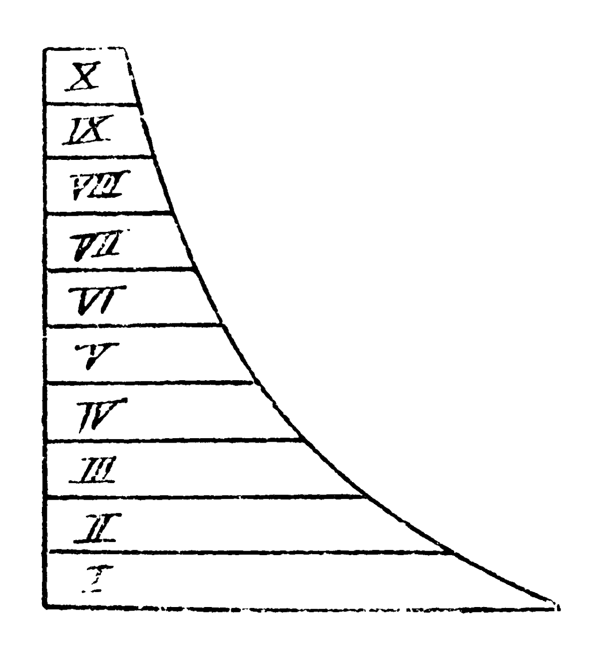
	二十尖錐汎積表
hb	100000000 長　方
$1/2\ hb$	050000000 平　方
$1/3\ hb$	033333333 立　方
$1/4\ hb$	025000000 三　乘
$1/5\ hb$	020000000 四　乘
$1/6\ hb$	016666666 五　乘
$1/7\ hb$	014285714 六　乘
$1/8\ hb$	012500000 七　乘
$1/9\ hb$	011111111 八　乘
$1/10\ hb$	010000000 九　乘
$1/11\ hb$	009090909 十　乘
$1/12\ hb$	008333333 十一乘
$1/13\ hb$	007692307 十二乘
$1/14\ hb$	007142857 十三乘
$1/15\ hb$	006666666 十四乘
$1/16\ hb$	006250000 十五乘
$1/17\ hb$	005682353 十六乘

1/18 hb	005555555 十七乘
1/19 hb	005263157 十八乘
1/20 hb	005000000 十九乘

乃分此汎積爲十段,如 I 至 X. 求其 II 至 X 之積.因如前 $II_A=II_D$ 之例,

故　$II=III+IV=VI+VII+VIII+IX+X.$

故　$II+III+\cdots\cdots+X=3\,II+V.$



次求第二段積,

$$=hb(=1)\times\Big\{\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(\frac{1}{20}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{19}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\Big)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{17}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{15}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{14}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{13}\Big)$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{11}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\left.\left.\left.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}\right\}.$$

$$=hb(=1)\times\left\{1.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}$$

$$=0.69314713=\log_e\frac{2}{1}=\log_e 2.$$

又求第五段積,

$$=hb\ (=1)\times\left\{1.\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{9}\right\}$$

$$=0.22314353=\log_e\frac{5}{1}=\log_e 5.$$

第二段至第十段共積$=II+\cdots\cdots+X=\log_e 5+3\log_e 2$

$$=\log_e 10=2.30258492.$$

$$\mu=1\div 2.3025492=0.43429451.$$

由是得定積表.

	二十尖錐定積表
μ	0.43429451 長·方
1/ 2 μ	0.21714725 平　方
1/ 3 μ	0.14476483 立　方
1/ 4 μ	0.10857362 三　乘
1/ 5 μ	0.08685890 四　乘
1/ 6 μ	0.07238241 五　乘
1/ 7 μ	0.06204207 六　乘
1/ 8 μ	0.05428681 七　乘
1/ 9 μ	0.04825494 八　乘
1/10 μ	0.04342945 九　乘
1/11 μ	0.03948131 十　乘
1/12 μ	0.03619120 十一乘
1/13 μ	0.03340727 十二乘
1/14 μ	0.03102103 十三乘
1/15 μ	0.02895296 十四乘
1/16 μ	0.02714340 十五乘
1/17 μ	0.02554673 十六乘

$1/18\ \mu$	0.02412747 十七乘
$1/19\ \mu$	0.02285760 十八乘
$1/20\ \mu$	0.02171472 十九乘

"既得二十尖錐定積,便可依此造表.一之對數,卽尖錐合積中之最下一段,其數無盡,不可求,故命爲0也."

求二之對數,

$$\log_{10} 2=\mu\left\{1.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}$$
$$=0.30103000.$$

其求 $\log_{10} 3$, 因 $3^{14}=4782969$, $\frac{1}{14}\mu=0.03102103$,

而 $\frac{1}{14}\mu\left(\frac{1}{3^{14}}\right)<0.00000001$. 故十四乘尖錐, $\left(卽\ \frac{1}{15}\mu\right)$ 以下,俱去不用.蓋此處僅用小數八位,今 $\frac{1}{14}\mu\left(\frac{1}{3^{14}}\right)$ 已小於 $0.\overset{7}{0}1$, 故於所求,已不生影響,其次項可以俱去不用.

$$\log_{10} 3=\log_{10} 2+\mu\left\{1.\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{14}\left(\frac{1}{3}\right)^{14}\right\}=0.47712126.$$

同理求 $\log_{10} 7$, 因 $7^8 = 5764801$, $\frac{1}{8}\mu = 0.05428681$,

而 $\frac{1}{8}\mu\left(\frac{1}{7^8}\right) < 0.00000001$, 故八乘錐, $\left(即 \frac{1}{9}\mu\right)$ 以下,俱去不用.

$$\log_{10} 7 = \log_{10} 6 + \mu\left\{1.\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3 + \cdots\cdots + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{7}\right)^8\right\} = 0.8450980.$$

李善蘭蓋以 $\log_e \frac{m}{n} = \log_e m - \log_e n$

$$= \left\{\frac{m-n}{m} + \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3 + \cdots\cdots\right\}$$

與鄒伯奇乘方捷術同,而為顧觀光第五術也.

正 數	對 數
1	0.00000000
2	0.30103000
3	0.47712126
4	0.60206000
5	0.69897000

6	0.77815126
7	0.84509805
8	0.90309000
9	0.95424252
10	1.00000000

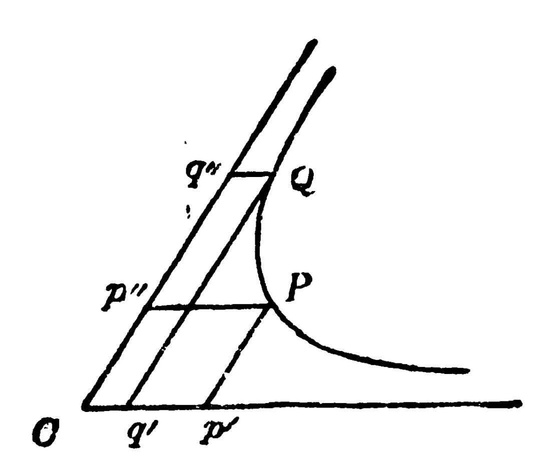
李善蘭對數學說,亦可以微積分解析之,見周明羣,李鄒顧戴徐諸家對於對數之研究.(清華學報第三卷第二期,1926,十二月.)

12. 圜錐曲線,級數回求

(7) 圓錐曲線三卷,英國艾約瑟口譯,海寧李善蘭筆述.

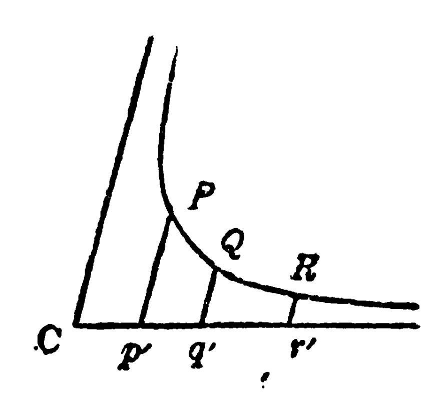
譯書年代未詳,書中註稱"詳代微積拾級",——此割線,代微積拾級(1859刻)名次切線——則書當刻於1859之後.

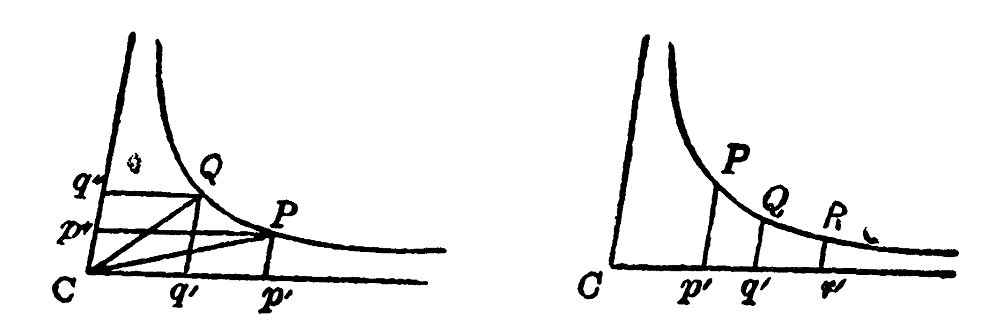
其卷二"第十二款(雙)曲線上任取一點(P或Q),作二線(Pp', Pp''或Qq',Qq'')至二漸近線亦與漸近線平行,成四邊形(PC或QC)其積恆等."



"一系. $Qq' \times Qq'' = Pp' \times Pp''$ 故 $Cq'' : Cp'' = Cp' : Cq'$. Cq'' 愈大, 則 Cq' 愈小. 然 Cq' 雖極小, 終不能至於無. 而漸近線與曲線, 雖漸長漸近, 亦終不能相遇, 中間總隔一 Cq' 也. 故漸近線一若爲曲線無盡界外之切線. 然漸近線長至無窮, Cq' 小至無窮, 亦終不能與曲線相切也."

"二系. 於漸近線上截取諸分, (如 Cp', Cq', Cr') 令成漸大連比例, 又自諸截點與餘一漸近線平行作諸線, 至曲線界 (如 Pp', Qq', Rr'), 必成漸小連比例, 因諸線與諸截分, 兩兩相乘, 俱等積故也."





"第十三款. CQP 二直一曲三邊形, $q''QPp''$ 三直一曲四邊形, $q'QPp'$ 三直一曲四邊形, 俱等積."

"一系. Cp', Cq', Cr' 諸連比例數, 設命 $Cp'=1$, Cq', Cr' 任爲若干, $Pp'Qq'$, $Pp'Rr'$ 二段積必與 Cq', Cr' 之對數相符. 蓋 Cp', Cq', Cr' 既成連比例, 則所截各段面積, 必成遞加比例. 若 C 爲直角, Cp', Pp' 俱爲 1, Cq' 爲 10, Cr' 爲 100, 則 $Pp'Qq'$ 面積必爲 2.30258509, $Pp'Rr'$ 面積必爲 4.60517018, 此卽訥白爾表 10 與 100 之對數也."

"二系. 設於 Cr', PR 二線之間, 另作一雙曲線, 則所得對數根又變, 蓋一曲線一根數也."

"三系. C 角變, 對數之根亦變. C 爲直角, 正弦爲 1, 則爲訥白爾之對數根. 設 C 爲 $25°44'27''\frac{15''}{60}$ 之角, 正弦爲 0.43429448, 則爲巴理知 (Briggs) 表之率, 卽今所用對數表之根也."

李善蘭級數回求稱:"今有眞數求對數[訥白爾對數]之級數,問對數求眞數之級數若何?",

因 $\log_e x=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots,$

或 $$y=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots. \qquad (A)$$

(A) 自乘之得

$$y^2=\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{2x^3}+\frac{(x-1)^4}{3x^4}+\cdots\cdots$$

$$\frac{(x-1)^3}{2x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots$$

$$\frac{(x-1)^4}{3x^4}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^2=\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{2(x-1)^3}{2x^3}+\frac{11(x-1)^4}{12x^4}+\cdots\cdots \qquad (B)$$

(A)×(B) 得

$$y^3=\frac{(x-1)^3}{x^3}+\frac{3(x-1)^4}{2x^4}+\cdots\cdots. \qquad (C)$$

(A)×(C) 得

$$y^4=\frac{(x-1)^4}{x^4}+\cdots\cdots. \qquad (D)$$

乃取 (B) 式, 2 約之得

$$\frac{y^2}{2}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{2x^3}+\frac{11(x-1)^4}{24x^4}+\cdots\cdots. \quad (1)$$

$(1)+(A)$, 得

$$y+\frac{y^2}{2}=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{(x-1)^2}{x^3}+\frac{17(x-1)^3}{24x^4}+\cdots. \quad (2)$$

又取 (C) 式 6 約之得

$$\frac{y^3}{6}=\frac{(x-1)^3}{6x^3}+\frac{3(x-1)^4}{12x^4}+\cdots\cdots. \quad (2)_a$$

$(2)_a+(2)$, 得

$$y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}=\frac{(x-1)}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{x^3}$$

$$+\frac{23(x-1)^4}{24x^4}+\cdots. \quad (3)$$

又取 (D)24 約之得

$$\frac{y^4}{24}=\frac{(x-1)^4}{24x^4}+\cdots\cdots. \quad (3)_a$$

$(3)_a+(3)$, 得

$$y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{y^4}{24}=\frac{(x-1)}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{x^3}$$

$$+\frac{(x-1)^4}{x^4}+\cdots\cdots. \quad (4)$$

$$=(x-1)$$

李善蘭曰: "攷 (4) 式左邊三級之分母爲 2, 3 相乘, 四級之母數爲 2, 3, 4 連乘, 然則五級必爲 2, 3, 4, 5

連乘,六級必爲 2, 3, 4, 5, 6 連乘,其理已顯,無庸再求.右邊各母之係數消盡,其總數必與 $x-1$ 等.乃左右各加一,即得對數,求眞數之級數,……."

$$x=1+y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\cdots\cdots$$

13. 數學啓蒙

(8) 數學啓蒙二卷,英國偉烈亞力撰,咸豐癸丑,1853 自序.其卷二"對數"條,註稱:"對數乃大英訥白爾 (Napier) 創作,明萬曆時,播揚於世,凡西土之曆數家,莫不心悅誠服,是則是效焉.同時巴理知 (Briggs) 者,精純數理,亦英人也.特來訥白爾處參互考訂.以舊表浩繁,擬另立新表,歸於便宜敏捷.未幾訥白爾卒,惟巴理知自行改易.其眞數由一萬至二萬,又由九萬至十萬,對數以十四位止.崇禎十年 (1624) 付之剞劂,後四載 (1628),又有荷蘭佛拉哥 (Vlacq) 出,將巴理知未及之二萬後以至九萬,均逐數補齊.凡一至十萬一千,毫無缺陷.因對數十四位尙繁,是以删去四位存十位,即在荷蘭復行刊刻,現中華通行之本,乃佛拉哥手訂之書也."

其"造對數法之一"條,與數理精蘊,"用中比例求假數法"相同.又"造對數法之二"置定數$(2\mu)=0.868588964$.又設眞數3,求假數問得幾何.

因 $\log 2=0.301029995$, 又

$$\log\frac{N}{2}=0.868588964\left\{\frac{1}{2N-1}+\frac{1}{(2N-1)^3}+\frac{1}{(2N-1)^5}+\cdots\cdots\right\}$$

如 $N=3$,

$$\therefore\quad \log\frac{3}{2}=0.176091260$$

$$\log 2=0.301029995$$

$\therefore\quad \log 3=0.477121255$.此卽三角數理(1877)卷六第三十四款之法.

14. 乘方捷術

(9) 鄒伯奇(1819—1869)乘方捷術共三卷,其卷二稱:"對數者,設假數與眞數相對立爲表,以備加減代乘除之用,故名對數表.創自西人訥白爾,其初爲表也,以眞數開九乘方極多次所得方根零數,卽爲對數,故名自然對數.今西書稱爲訥表對數.[卽戴氏

所謂假設對數]. 後有佛拉哥(Vlacq)以訥表對數十之對數是2.302585不便進位,乃改十之對數爲一,百之對數爲二,……是爲十進對數,始刻於荷蘭,乃流入中國,即今數理精蘊之十萬對數表是也.[即戴氏所稱定率對數]."按此節所記,雖於對數發明之歷史,未深通曉,其言佛拉哥蓋出於偉烈亞力之數學啓蒙.乘方捷術不題著作年月.憑此記事,可知其在咸豐癸丑(1853)後矣.

乘方捷術卷一,舉四例并以開方勾股解之,如:

(1) (2), $N^{\frac{m}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{m}{n}}$

$$=P^{\frac{m}{n}}\pm\frac{m}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-n}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$\mp\frac{m-2n}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-3n}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}\mp\cdots\cdots.$$

(3) (4), $N^{\frac{m}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{m}{n}}$

$$=P^{\frac{m}{n}}\pm\frac{m}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+n}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

$$\pm\frac{m+2n}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+3n}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots.$$

例 (1), $(c^2)^{\frac{1}{2}}=(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}=b+\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{b^2}+\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{b^2}$

$$-\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{b^2}+\cdots\cdots.$$

$$(2),\quad (b^2)^{\frac{1}{2}}=(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=c-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

$$-\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{b^2}-\cdots\cdots.$$

$$(3),\quad (c^2)^{\frac{1}{2}}=(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}=b+\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{3}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{5}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{c^2}$$

$$+\frac{7}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{c^2}+\cdots\cdots.$$

$$(4),\quad (b^2)^{\frac{1}{2}}=(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=c-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{3}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{c^2}-\frac{5}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{c^2}$$

$$+\frac{7}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{c^2}-\cdots\cdots.$$

又"以二為實,開無量數乘方之根",

從第一術,$m=1$, n 為極大時,則 $n+1$, 與 n, 約略相等, $2n+1$ 與 $2n$, $3n+1$ 與 $3n$ 等,亦約略相等,故

$$2^{\frac{1}{n}}=(1+1)^{\frac{1}{n}}=1+1.\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^4+\cdots\cdots.$$

如 $n=2$, 則 $\log_e 2=0.69314718055994638$. 是也.

卷二記"有大小兩真數,求對數較法",先具三術,如:

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$

$$=\mu\left\{\left(\frac{m-n}{m}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$

$$=\mu\left\{\left(\frac{m-n}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{n}\right)^4+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$

$$=2\mu\left\{\left(\frac{m-n}{m+n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5\right.$$

$$\left.+\frac{1}{7}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^7+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

其求對數較第四術註稱:"此又於前三術,連求三數之較",

設 $\frac{m+n}{2}=t$, 而 $m>t>n$

則 $\log_e\frac{t}{n}=\left\{\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3\right.$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\cdots\cdots\right\},$$

$$\log_e\frac{m}{t}=\left\{\left(\frac{m-n}{2t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3\right.$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\cdots\cdots\Big\},$$

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^5+\cdots\cdots\right\},$$

$$\log_e\frac{t^2}{mn}=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^6+\cdots\cdots\right\}.$$

又如"有對數較,求大小兩眞數之比例",

$$\frac{m}{n}=1+\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{1\cdot 2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{n}{m}=1-\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{1\cdot 2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots.$$

其所求自然對數,常對數,具列如下:

自然對數表	
眞數	假數
1	0.00000000000
2	0.69314718056
3	1.09861228866
4	1.38629436112
5	1.60943791242
6	1.79175946922

常對數表	
眞數	假數
1	0.000000000
2	0.301029996
3	0.477121255
4	0.602059991
5	0.698970004
6	0.778151250

7	1.94591014904
8	2.07944154168
9	2.19722457732
10	2.30258509299

7	0.845098040
8	0.903089987
9	0.954242509
10	1.000000000

15. 算賸續編,造各表簡法

10. 顧觀光(1799—1862)算賸續編有(1)用屢乘屢除求對數法(1854),(2)對數還原(1854),(3)對數衍(1854).

先求定率對數;

$$(a)\quad 2\mu=1\div 2\left\{\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^7+\cdots\cdots\right\}$$

$=0.86858896380$ 爲定率對數,而 $\mu=$ 對數根

$$(b)\quad 2\mu=1^2\div 10\left\{\left(1+\frac{1}{3\times 9}+\frac{1}{5\times 9^2}+\frac{1}{7\times 9^3}+\frac{1}{9\times 9^4}+\frac{1}{11\times 9^5}+\frac{1}{13\times 9^6}+\frac{1}{15\times 9^7}+\frac{1}{17\times 9^8}+\frac{1}{19\times 9^9}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\times 9^3}+\frac{1}{5\times 9^5}+\frac{1}{7\times 9^9}+\cdots\cdots\right)\right\}$$

$=0.868588996380.$

既得定率對數，即可求二至九之八對數.

因 $\frac{1}{\log_e 10}=0.43429448$, $\therefore$ $\log_{10} n=\frac{1}{\log_e 10}\times\log_e n$

$=0.43429448\times\log_e n.$

已知 $\log 10=1$,

又 $\mu\log_e 10=\mu\log_e 9+2\mu\left\{\frac{1}{2\times 9+1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2\times 9+1}\right)^3\right.$

$\left.+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2\times 9+1}\right)^5+\cdots\right\}.$

則 $\log 10=\log 9+0.04575749056$, $\therefore$ $\log 9=0.95424250944.$

同理可求八至二之各數對數.既得二至九之八對數，則餘皆可推.

(顧觀光第一術)與夏鸞翔萬象一原(1862)第一術，及代數術(1873)第一七一款所述相同.

$$\log_e(n+x)=\log_e n+2\left\{\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

或 $$\log(n+x)=\log n+2\mu\left\{\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\log n+r.$$

例，　$\log 23 = \log(20+3)$

$$= \log 20 + 2\mu\left\{\frac{3}{43} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{43}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{43}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}$$

$$= 1.36172783601.$$

(顧觀光第二術)與徐有壬造各表簡法(1859?)及代微積拾級(1859)相同.顧氏自言本數學啓蒙(1853)之術而小變之.

$$\log_e \frac{m}{n} = 2\left\{\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}$$

或　$$\log \frac{m}{n} = 2\mu\left\{\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \cdots\right\} = P.$$

例，　$$\log 23 = \log 30 - 2\mu\left\{\frac{7}{53} + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{53}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{7}{53}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}$$

$$= 1.36172783601.$$

(顧觀光第三術)似本之戴煦續對數簡法(1846)，"以本數爲積，求折小各率，第一術."亦可由鄒伯奇，乘方捷術(1)式化得.

$$\log(n+x) = \log n + \mu\left\{\frac{x}{n+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{n+x}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{n+x}\right)^4 + \cdots\cdots\right\}$$

$$= \log n + r$$

例，

$$\log 23=\log 20+\mu\left\{\frac{3}{23}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{23}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{23}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{23}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1.361727\cdots\cdots.$$

（顧觀光第四術）似本之戴煦積對數簡法(1846)，“以本數爲積，求折小各率，第二術.”亦可由鄒伯奇乘方捷術(2)式化得，又與微積溯源第四十二款相同.

$$\log(n+x)=\log n+\mu\left\{\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\log n+r$$

（顧觀光第五術）與李善蘭對數探源及鄒伯奇乘方捷術(1)式相同.

$$\log\frac{m}{n}=\mu\left\{\frac{m-n}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)+\cdots\cdots\right\}=p.$$

（顧觀光第六術）與鄒伯奇乘方捷術(2)式相同.

$$\log\frac{m}{n}=\mu\left\{\frac{m-n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)-\cdots\cdots\right\}=p.$$

其"對數還原",因令1=正數,$10^{\frac{1}{10}}=1.25892541$,

$$\log_{10} 1.258925411=\frac{1}{10}, \text{ 又 } 10^{\frac{1}{10}}=1.25892541$$

$$=1+t,$$

$\frac{t}{1+t}=2.05671776$ 爲正數根,設 $\log s=1\ 36172783602$

求其正數.

(第一術) 如前第一術,$r=0.060697840\frac{36}{}$,又 $s=n+x$

$$s=n\left\{1+\left(\frac{t}{t+1}\right)r+\frac{1}{\underline{|2}}.\left(\frac{t}{t+1}\right)^2.r.(r+1)\right.$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3.r.(r+1)(r+2)$$

$$\left.+\frac{1}{\underline{|4}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^4.r.(r+1)(r+2)(r+3)+\cdots\right\}$$

(第二術)

$$s=n\left\{1+t\,r\mp\frac{1}{\underline{|2}}.t^2.r(1-r)+\frac{1}{\underline{|3}}.t^3.r(1-r)(2-r)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\underline{|4}}t^4.r(1-r)(2-r)(3-r)+\cdots\cdots\right\}$$

(第三術) 又令 $s=m-n$,如前第二術,$p=0.115393418\frac{70}{}$

$$s=m\div\left\{1+\left(\frac{t}{t+1}\right)p+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 p.(p+1)\right.$$

$$+\frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3 \cdot p.(p+1)(p+2)$$

$$+\frac{1}{\lfloor 4}\left(\frac{t}{t+1}\right)^4 \cdot p.(p+1)(p+2)(p+3)+\cdots\cdots\Big\}$$

(第四術)

$$s=m\div\Big\{1+10\,t.\,p-\frac{1}{\lfloor 2}.p^2.\,10\,t\,(1-10\,t)$$

$$+\frac{1}{\lfloor 3}p^3.\,10\,t\,(1-10\,t)\,(2-10\,t)$$

$$+\frac{1}{\lfloor 4}.\,p^4.\,10\,t\,(1-10\,t)\,(2-10\,t)\,(3-10\,t)+\cdots\Big\}$$

又"對數術"則示各對數互求之例.

(1) 有 $\log 23=\log m=1.361727836$, 求 $\log 19=\log n=?$

如前第二術,得 $\log n=1.278753601$.

(2) 有 $\log 19=\log n=1.278753601$, 求 $\log 23=\log m=?$

如前第二術,得 $\log m=1.361727836$.

(3) 有 $\log 23=\log m=1.361727836$, 求 $\log n=1.27875601=?$

$\log m-\log n=d$,

$$n=m\div\Big\{1+\left(\frac{t}{t+1}\right)d+\frac{1}{\lfloor 2}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 d(d+1)$$

$$+\frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3 d(a+1)(d+2)+\cdots\cdots\Big\}$$

或 $n=m\times\frac{1}{\gamma}$.

(4) 有 $\log 19=\log n=1.278753601$;

求 $\log m=1.361727836=$?

如前 $n=m\times\frac{1}{\gamma}$, 故 $m=n\gamma$.

(5) 有 $\log m=1.568201724$, $\log n=1.361727836$,

又 $m+n=w$, 求 n.?

由前兩式, 得 $n=\frac{w}{1+\gamma}$.

故 $$n=m\div\left\{1+\left[1+\left(\frac{t}{t+1}\right)d+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 d(d+1)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3 d(d+1)(d+2)+\cdots\cdots\right]\right\}$$

(6) 有 $\log m=1.568201724$, $\log n=1.361727836$,

又 $m-n=V$ 求 n?

由 (3), (4) 兩式, 得 $n=\frac{V}{\gamma-1}$.

(7) 有 $\log 37=\log m=p$, $\log 23=\log n=Q$,

$$T=P+Q=2.92992956, \text{ 求 } P?$$

如前第一術,

$$\log\frac{100}{37}=\log 100-\log 37=2\mu\left\{\frac{100-37}{100+37}+\frac{1}{3}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$\therefore$ $\log 37=2-0.43179828.$ $\log 23=T-\log 37.$

(8) 有 P, Q, 及 $U=P-Q$, 求 P?

如前第一術,

$$\log\frac{100}{37}=\log 100-\log 37=2\mu\left\{\frac{100-37}{100+37}+\frac{1}{3}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$\therefore\quad \log 37=2-0.43179828.\quad \log 23=\log 37-U.$

(11) 造各表簡法

徐有壬(1800−1860)造各表簡法,又名垛積招差.其"第五術造對數全表"稱:"先求對數根,設長三闊一之長方積,取十分之一爲第一小長方,[長折半,闊十分之二],其長闊和一除之爲第一數:十分小長方之一爲第二小長方,[長又折半,闊又十分之二],其長闊和二除之,爲第二數,……順是以下,皆如是遞求,至若干位,乃相併爲除法,以除單一得對數根."

$$\mu=1\div\left\{\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{10}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2^2}+\frac{2^2}{10^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2^3}+\frac{2^3}{10^3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{2^4}+\frac{2^4}{10^4}\right)+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1\div\left\{\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\right)+\frac{2}{10}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{8}\left(\frac{2}{10}\right)^2\right.\right.$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{10}\right)^8+\cdots\cdots\Big\}$$

$$=1\div 2.302585092994 04577=0.434294481903258$$ 11

求全表術則因下列公式:

$$\log\frac{m}{n}=2\mu\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

求 $\log n$, 或 $\log m$ 焉.

按偉烈亞力於咸豐己未(1859)代微積拾級序稱:"觀當代天算家,如董方立氏,項梅侶氏,徐君青氏,戴鄂士氏,顧尙之氏,暨李君秋紉所著各書,其理有甚近於微分者……,"此大約指各人用級數記圓周率數及對數而發,徐卒於庚申(1860),則造各表簡法當成於己未前矣.

16. 代數學,萬象一原

(12) 代數學十三卷,題英國棣麼甘撰,英國偉烈亞力口譯.海寧李善蘭筆受.前有偉烈咸豐己未(1859)自序.卷第十二"論指數對數之級數"謂:

$a^x=y$, 則 $\log_a y=x$, 而 a 爲底, x 爲 a^x 之對數

又謂(1)無論何底,1之對數恆爲0,如 $a^0=1$, 則 $\log_a 1=0$,

(2)凡底之對數爲1, $a^1=a$, 則 $\log_a a=1$

(3) 凡 y 與 $\frac{1}{y}$ 之對數，號異而數同.

如 $y=a^x$, 則 $\log_a y=x$

又 $\frac{1}{y}=a^{-x}$, 則 $\log_a \frac{1}{y}=-x$.

故 $\log_a \frac{1}{y}=-\log_a y$.

次論'對數之級數理'', 因從卷十一，依合名法 (binomial theorem).

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{\lfloor r}$$

設 $x=1$, 則

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

惟 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{x}$

則 $$\left(1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)^{x}$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

若n爲極大,則上式變爲

$$\left(1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\right)^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

即　$$\left(2.71828182\cdots\cdots\right)^x=e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

若以e爲底,則對數x之眞數爲$1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$

此謂之自然之對數,亦命爲雙曲線之對數.

上式旣合於理,則$e^{kx}=1+kx+\frac{k^2x^2}{\underline{|2}}+\frac{k^3x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$

令　$e^k=a$,則$k=\log_e a$.

即　$$a^x=1+x\log_e a+\frac{(x.\log_e a)^2}{\underline{|2}}+\frac{(x.\log_e a)^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots.$$

若x爲極小,則　$\log_e a=\frac{a^x-1}{x}$.

但從卷十一知

$$\frac{(1+\alpha)^x-1}{x}=\alpha+\frac{x-1}{\underline{|2}}\cdot\alpha^2+\frac{(x-1)(x-2)}{\underline{|3}}\cdot\alpha^3+\cdots\cdots.$$

若x爲極小,則

$$\frac{(1+\alpha)^x-1}{x}=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\cdots\cdots.$$

令　$\alpha=a-1$,

則　$$\frac{a^x-1}{x}=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots.$$

從此知，

$$\log_e a=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots.$$

由此得，

$$\log_e(1+m)=\left\{m-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m^3-\cdots\cdots\right\} \tag{1}$$

$$\log_e(1-m)=\left\{-m-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{3}m^3-\cdots\cdots\right\} \tag{2}$$

$$\log_e\left(\frac{1+m}{1-m}\right)=2\left\{m+\frac{m^3}{3}+\frac{m^5}{5}+\cdots\cdots\right\} \tag{3}$$

$$\log_e(n+1)-\log_e n=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right\} \tag{4}$$

按前二式與續對數簡法同，第(1)式又與顧觀光第四術同，四式又見對數詳解(1824)第四條(1)，(2)，(3)，及第五條(1)$_c$. 依此造對數表小數八位.

再從卷十一知

$$\frac{(1+a)^x-1}{x}=a+\frac{x-1}{\underline{|2}}.a^2+\frac{(x-1)(x-2)}{\underline{|3}}.a^3+\cdots\cdots$$

又
$$\frac{a^x-1}{x}=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots$$

又令　　$a^m=a$，　則

$$\frac{a^{mx}-1}{x}=m.\frac{a^{mx}-1}{mn}.$$

設 m 爲定數,n 爲極小,則 mx 更當極小.故若 x 爲極小,而 x 之函數之極限爲 N,則 mx 函數之極限亦必爲 N. 其不同者,可取 x 之小,令 x 之函數,任近於所設之限 N,命其較爲 k,而取 m 分 x 同數之一,則可令 mx 之函數同近於 N. 所以

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{a^{mx}-1}{mx},\ \text{即}\ f(a)=\frac{1}{m}f(a^m).$$

即 $$(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\cdots\cdots=\frac{1}{m}\left\{(a^m-1)-\frac{1}{2}(a^m-1)^2+\cdots\right\}$$

即 $$\log_e a=\frac{1}{m}\log_e a^m.$$

觀此更明 $\frac{a^x-1}{x}$ 之限,等於 $\log_e a=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\cdots$

即 $\log_e a=\frac{a^x-1}{x}$,古人用此理,遞開 a 之方數,以造對數表.如 $a=1.204$,$x=\frac{1}{2}^{47}$,$\log_e 1.024=(1.024^{\frac{1}{2}^{47}}-1)\times 2^{47}$ 是也.(28)

卷十三論以10爲底之對數,謂

$$\log_{10}x=\frac{\log_e x}{\log_e 10}=\frac{\log_e x}{2.30258509}=0.4342944819\times\log_e x.$$

此對數表名爲常對數,亦名爲表對數,亦名爲十進對數,亦名爲巴理知對數.以0.43429……爲其根率.凡

(28) 見前數理精蘊(c)(d).

$\frac{1}{\log_e a}$ 即 $\log_a e$ 名為 a 底對數之根率.

同卷論對數較之原則,從前(4)式

$$\log_{10}(x+1)=\log_{10}x+2\mu\left\{\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2x+1)^3}+\cdots\cdots\right\}$$

如 x 愈大,則 $\log_{10}(x+1)$, $\log_{10}x$ 之較愈小.

又檢表知 $\log_{10}(51520+1)=\log_{10}51520+0.0000084.$

$\log_{10}(51520+2)=\log_{10}51520+0.0000084\times 2.$

即 $h<10$, 則

$$\log_{10}(51520+h)=\log_{10}51520+0.0000084\times h\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

從前(1)式,

$$\log_{10}\left(1+\frac{h}{x}\right)=\mu\left\{\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3-\cdots\cdots\right\}$$

若 $\frac{h}{x}$ 甚小,則 $\log(x+h)=\log x+\mu\frac{h}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$

(b)式與(a)式比較, $0.0000084=\mu\cdot\frac{1}{x}=0.4342945\times\frac{1}{51520}$ 是也.

(13) 萬象一原

同治元年壬戌(1862)錢塘夏鸞翔演萬象一原.其第一卷末有"求眞數之訥氏對數"註謂[本徐氏(有壬)中國對數術變通之].今按其公式術語且有譔記.所

載二式:

$$\log_e(n+x)=\log_e n+2\left\{\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\frac{x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\log_e(n-x)=\log_e n+2\left\{-\frac{x}{2n+x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{(2n+x)^3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{(2n+x)^5}-\cdots\cdots\right\}$$

與顧觀光有正數求對數第一術(1854)相同.

又有"求眞數之訥氏負對數",其術語亦有誤記.按戴煦假數測圓卷上有"求負對數二術",蓋求不滿單一之眞數,如 log 0.98 者;夏之所取,蓋亦其義.今取小於眞數 $(n+x)$ 之借眞數爲 t,大於眞數 $(n+x)$ 之借眞數常爲1.故應書爲:

$$\log_e(n+x)=\log(1-t)=\log_e 1+2\left\{-\frac{t}{2-t}-\frac{1}{3}\left(\frac{t}{2-t}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{t}{2-t}\right)^5-\cdots\cdots\right\}$$

17. 代數術,對數詳解

(14) 代數術二十五卷,英國華里司輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述,第十八卷第一六八款至一

七八款論對數.前有同治十二年(1873)華蘅芳序.書刻於同治十三年(1874).[29]

(15) 對數詳解五卷,長沙丁取忠,湘鄉曾紀鴻同撰,同治甲戌(1874)丁取忠序.是書即代數術第十八卷之詳解.

卷二,第三條,謂: $c^x=y$, 已知 c, y 求 x. $x=\log_c y$.

設 $$c=1+a\cdots\cdots(1)$$

$$y=1+b\cdots\cdots(2)$$

則 $c^x=y$ 之式變爲 $$(1+a)^x=(1+b)\cdots\cdots(3)$$

兩邊各乘至 n 方 $$(1+a)^{nx}=(1+b)^n\cdots\cdots(4)$$

以二項式展開之

$$1+\frac{nx}{1}\cdot a+\frac{nx(nx-1)}{\underline{|2}}\cdot a^2+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{\underline{|3}}\cdot a^3+\frac{nx(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{\underline{|4}}a^4+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{n}{1}\cdot b+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}b^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}\cdot b^4+\cdots\cdots \quad (5)$$

兩邊減1又除 n, 得

---

(29) 見江南製造局記,卷二,第十九頁.

$$x\cdot a+\frac{x(nx-1)}{\underline{|2}}\cdot a^2+\frac{x(nx-1)(nx-2)}{\underline{|3}}\cdot a^3$$

$$+\frac{x(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{\underline{|4}}\cdot a^4+\cdots\cdots$$

$$=b+\frac{(n-1)}{\underline{|2}}\cdot b^2+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot b^3+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}\cdot b^4$$

$$+\cdots\cdots \tag{6}$$

化之得:

$$x\cdot a+\left(Pn-\frac{x}{2}\right)a^2+\left(P'n+Qn^2+\frac{x}{3}\right)a^3$$

$$+\left(P''n+Q'n^2+Rn^3-\frac{x}{4}\right)a^4+\cdots\cdots$$

$$=b+\left(pn-\frac{1}{2}\right)b^2+\left(p'n+qn^2+\frac{1}{3}\right)b^3$$

$$+\left(p''n+q'n^2+rn^3-\frac{1}{4}\right)b^4+\cdots\cdots \tag{7}$$

變之得:

$$\left\{x\cdot a-\frac{x}{2}a^2+\frac{x}{3}a^3-\frac{x}{4}a^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$+\left\{Pna^2+\left(P'n+Qn^2\right)a^3+\left(P''n+Q'n^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+Rn^3\right)a^4+\cdots\cdots\right\}=\left\{b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\right\}+\left\{pnb^2+\left(p'n+qn^2\right)b^3+\left(p''n+q'n^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+rn^3\right)b^4+\cdots\cdots\right\}. \tag{8}$$

前(3)式以乘 n 方者，爲借用以展開級數，今既展開矣，

試令 $n=0$，則

$$x\cdot a-\frac{x}{2}a^2+\frac{x}{3}\cdot a^3-\frac{x}{4}\cdot a^4+\cdots\cdots=b-\frac{1}{2}b^2$$
$$+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots. \qquad (9)$$

變之得

$$x\left(a-\frac{1}{2}\cdot a^2+\frac{1}{3}\cdot a^3+\frac{1}{4}\cdot a^4+\cdots\cdots\right)=b-\frac{1}{2}b^2$$
$$+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots. \qquad (10)$$

兩邊各以 $\left(a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\cdots\right)$ 除之，得

$$x=\log_e y=\left(b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots\right)$$
$$\times\frac{1}{\left(a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\cdots\right)}.$$

因 $c=1+a$，故 $a=c-1$，(10)式左邊變爲

$$x\left\{(c-1)-\frac{1}{2}(c-1)^2+\frac{1}{3}(c-1)^3-\frac{1}{4}(c-1)^4+\cdots\cdots\right\}$$

前言 c 爲對數之底，總不變，故

$$\left\{(c-1)-\frac{1}{2}(c-1)^2+\frac{1}{3}(c-1)^3-\frac{1}{4}(c-1)^4+\cdots\cdots\right\}$$

亦不變,是爲常數,以 A 代之,故 (10) 式左邊變爲 Ax.

惟因 $y=1+b$, 故 $b=y-1$, 所以 (10) 式右邊變爲

$$(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots$$

故 $$Ax=(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots. \tag{12}$$

或 $$x=\frac{1}{A}\left\{(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3+\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots\right\} \tag{13}$$

$$=\log_e y.$$

用 (13) 式亦可求眞數之對數,惟其眞數 y 必大於 1, 而小於 2 方可求. 若 $y<2$, 則級數之收斂甚遲, 玆另變其式, 令斂得較速.

第四條. (13) 式變之得

$$\log(1+m)=\frac{1}{A}\left\{m-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{4}m^4+\cdots\cdots\right\}. \tag{1}$$

若令 $-m=m$, (1) 式變爲

$$\log(1-m)=\frac{1}{A}\left\{-m-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{4}m^4-\cdots\cdots\right\}. \tag{2}$$

惟 $$\log(1+m)-\log(1-m)=\log\left(\frac{1+m}{1-m}\right)$$

(1)−(2), 又簡之得

$$\log\left(\frac{1+m}{1-m}\right)=\frac{2}{A}\left(m+\frac{m^3}{3}+\frac{m^5}{5}+\frac{m^7}{7}+\cdots\cdots\right). \tag{3}$$

令 $\frac{1+m}{1-m}=y,$ 則 $m=\frac{y-1}{y+1},$

故 $$\log y=\frac{1}{A}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\frac{2}{7}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^7+\cdots\cdots\right\}. \tag{4}$$

此式無論 y 之同數如何,必為斂級數,凡對數皆可求,故此為公式.

第五條. 若已知 $\log n$, 求 $\log(n+x)$

因 $\log(n+x)-\log n=\log\frac{n+x}{n}.$

以 $\frac{n+x}{n}=y$ 代入上條(4)式,則 $\frac{y-1}{y+1}=\frac{x}{2n+x}.$

故 $$\log\frac{n+x}{n}=\log(n+x)-\log n=\frac{1}{A}\left\{\frac{2x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right\}$$

卽 $$\log(n+x)=\log n+\frac{1}{A}\left\{\frac{2x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right\} \tag{1}$$

合前第三條(13)式,第四條(4)式,第五條(1)式觀之,其

右邊皆有 $\frac{1}{A}$. 是知 $\frac{1}{A}$ 爲對數底 c 之所生. 底不變, $\frac{1}{A}$ 亦不變, 是爲常數, 稱爲對數之根.

卷三, 第六條, 謂 $A=1$, 即 $\frac{1}{A}=1$, 則此對數爲訥對.

卷四, 第九條, 謂 $c^x=y$, 已知 c, x 求 y.

令
$$c=1+a \tag{1}$$

則
$$y=(1+a)^x \tag{2}$$

$$=\left[(1+a)^n\right]^{\frac{x}{n}} \tag{3}$$

因
$$(1+a)^n=1+\frac{n}{1}\cdot a+\frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}\cdot a^2+\frac{n(n-1)(n+2)}{\lfloor\underline{3}}\cdot a^3+\cdots\cdots \tag{4}$$

$$=1+\frac{n}{1}\cdot a+\frac{n^2-n}{\lfloor\underline{2}}\cdot a^2+\frac{n^3-3n^2+2n}{\lfloor\underline{3}}\cdot a^3+\cdots\cdots. \tag{5}$$

$$=1+\frac{n}{1}\cdot a+\left[\frac{n^2}{\lfloor\underline{2}}\cdot a^2-\frac{n}{\lfloor\underline{2}}\cdot a^2\right]+\left[\frac{n^3}{\lfloor\underline{3}}\cdot a^3-\frac{3n^2}{\lfloor\underline{3}}\cdot a^3+\frac{2n}{\lfloor\underline{3}}\cdot a^3\right]+\cdots\cdots. \tag{6}$$

$$=1+\frac{a}{1}\cdot n+\left[\frac{a^2}{1\cdot 2}\cdot n^2-\frac{a^2}{1\cdot 2}\cdot n\right]+\left[\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot n^3-\frac{a^3}{1\cdot 2}\cdot n^2+\frac{a^3}{1\cdot 3}n\right]+\cdots\cdots. \tag{7}$$

$$=1+a\cdot n+\left(\frac{a^2}{2}\right)n^2-\left(\frac{a^2}{2}\right)n+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\right)n^3+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2}\right)n^2$$

$$+\left(\frac{a^3}{1\cdot 3}\right)n+\cdots\cdots. \quad (8)$$

$$=1+\left(a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\cdots\cdots\right)n+\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{2}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\right)n^2+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\cdots\cdots\right)n^3+\cdots. \quad (9)$$

$$=1+An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots. \quad (10)$$

而 $$A=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\cdots\cdots. \quad (11)$$

故 $$y=(1+An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^{\frac{x}{n}} \quad (12)$$

$$=1+\frac{x}{n}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)+\frac{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)}{1\cdot 2}(An$$

$$+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)\left(\frac{x}{n}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)$$

$$+\cdots\cdots. \quad (13)$$

即 $$y=1+\frac{x}{n}\left(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots\right)+\frac{x(x-n)}{1\cdot 2\cdot n^2}(An$$

$$+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^2$$

$$+\frac{x(x-n)(x-2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^3$$

$$+\cdots\cdots \quad (14)$$

$$=1+\frac{x}{1}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)+\frac{x(x-n)}{1\cdot2}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)^2$$
$$+\frac{x(x-n)(x-2n)}{1\cdot2\cdot3}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)^3+\cdots\cdots \qquad (15)$$

令 $n=0$,

則 $$y=c^x=1+\frac{x}{1}A+\frac{x^2}{1\cdot2}A^2+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}A^3+\cdots\cdots \qquad (16)$$

而 $$A=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}\cdots\cdots \qquad (17)$$
$$=(c-1)-\frac{(c-1)^2}{2}+\frac{(c-1)^3}{3}-\frac{(c-1)^4}{4}+\cdots\cdots$$

既已明 A 之同數爲底之訥對.又知 x 爲對數,[卽底 c 之指數],若干.用(16)式右邊級數求之,可識 y [卽眞數]之同數. 如 $c^x=y$ 中 $x=1$

則 $$y=1+\frac{A}{1}+\frac{A^2}{1\cdot2}+\frac{A^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots \qquad (18)$$

如令 $x=\frac{1}{A}$,則 $c^x=y$ 爲 $y=c^{\frac{1}{A}}$,而(16)式變爲

$$c^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots$$
$$=2.718281828459045235360288\cdots\cdots \qquad (19)$$
$$=e$$

即　$c^{\frac{1}{A}}=e$, 或 $c=e^{A}$

惟因 A 爲 c 之訥對，故知 e 爲訥對數之底．與常對數以 10 爲底不同也．

卷四第十條，$x=\log_c y$，則 $c^x=y$，變爲 $c^{\log y}=y$.

或　$c^{n\log y}=y^n$.　(1)

今有　$c^{\frac{1}{A}}=e$ 之式，則 $\log c^{\frac{1}{A}}=\log e$　(2)

從 (1) 式，　$(c)^{\frac{1}{A}\log c}=c^{\frac{1}{A}}$.　(3)

$$\frac{1}{A}\log c=\log c^{\frac{1}{A}}. \quad (4)$$

又從 (2) 式，　$\frac{1}{A}\log c=\log e$　(5)

兩邊乘 A，得　$\log c=A\log e$　(6)

兩邊除 $\log e$，　$A=\frac{\log c}{\log e}$　(7)

代入第九條之 (16) 式，則

$$c^x=y=1+\frac{x}{1}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)+\frac{x^2}{1\cdot2}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)^2+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)^3+\cdots\cdots \quad (8)$$

設　$c=e$，則

$$e^x=y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots \quad (9)$$

如已知 $\log_{10} y=x$ 之數，求 y.

於 (8)，因 $\log c=\log 10=1$

又 $\log c=\frac{1}{A}=0.43429\cdots\cdots11289$. 代入得之.

由是得下開常對數表各數.

常對數表	
眞數	對數
1	0.0000000000000000000000000
2	0.3010299956639811952l121
3	0.4771212547196524417769l
4	0.60205999132796239042242
5	0.69897000433601880478879
6	0.77815125038363363698812
7	0.84509804001424683518028
8	0.95424250943930488355382
10	1.0000000000000000000000000

18. 微積溯源，對數表，對數述

(16) 微積溯源八卷，英國華里司輯，英國傅蘭雅

口譯,金匱華蘅芳筆述.同治十三年(1874)刻.[80] 其第三十五款至第四十二款證得

$$y=c^x=1+\frac{x}{1}\cdot A+\frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot A^2+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot A^3+\cdots\cdots$$

又 $$y=1+\frac{A}{1}+\frac{A^2}{1\cdot 2}+\frac{A^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$$

及 $$c^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots=2.71828\cdots\cdots=e$$

$$e^x=y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots$$

并 $$\log(n+x)=\log n+\frac{1}{A}\left\{\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3-\cdots\cdots\right\}$$

(17) 對數表四卷四册,賈步緯校,江南製造局印.

(18) 對數表一册,附八線對數表,八線表.美國路密司撰,赫士譯,高密,朱葆琛筆述.

(19) 對數述四卷,陳其晉撰(1877),其卷一卷二引徐有壬,李善蘭,顧觀光,及西人代數學,代微積拾級論對數之說

19. 三角數理,對數表引說,用對數表訣,造對數法

(30) 見江南製造局記.

(20) 三角數理十二卷,英國海麻士輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述,第六卷專論對數.[31] 光緒三年(1877)刻.[32] 書中第二十五款至三十四款"論指數及指數之對數".

第二十五款. 因 $x=0$, 則 $a^x=1$,

又因 $$a=1+(a-1)$$

∴ $$a^x=[1+(a-1)]^x$$

$$=1+x(a-1)+x(x-1)\frac{(a-1)^2}{1\cdot 2}+x(x-1)(x-2)\frac{(a-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$$

$$=1+\left\{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+\cdots\cdots\right\}x+\cdots\cdots$$

令 $a^x=1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots\cdots$

而 $p_1=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\cdots\cdots$ 爲 x 之倍數, p_2, p_3, …… 爲 x 他方之倍數, x 無論爲何值均合.

又因 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, 於上級數中, 一令 $x=y$, 一令 $x=x+y$,

(31) 見繙譯館編江南製造局譯書提要卷二,第三三,三四頁.

(32) 見江南製造局記卷二,第二十九頁.

則得 $a^y=1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+\cdots\cdots$

又 $a^{x+y}=1+p_1(x+y)+p_2(x+y)^2+p_3(x+y)^3+\cdots\cdots$

因 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$,

則 $(1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots\cdots)(1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+\cdots\cdots)$

$$=1+p_1(x+y)+p_2(x+y)^2+p_3(x+y)^3+\cdots\cdots$$

展開之,消去 y,得

$$p_1+p_1{}^2x+p_1p_2x^2+p_1p_3x^3+\cdots\cdots$$

$$=p_1+2p_2x+3p_3x^2+4p_4x^3+\cdots\cdots$$

故 $2p_2=p_1{}^2,\ 3p_3=p_1p_2,\ 4p_4=p_1p_3,\cdots\cdots$

$\therefore$ $p_2=\dfrac{p_1{}^2}{1\cdot2},\ p_3=\dfrac{p_1{}^3}{1\cdot2\cdot3},\ p_4=\dfrac{p_1{}^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4},\ \cdots\cdots$

代入得, $a^x=1+p_1x+\dfrac{p_1{}^2}{1\cdot2}x^2+\dfrac{p_1{}^3}{1\cdot2\cdot3}x^3+\dfrac{p_1{}^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\cdots\cdots$

而 $p_1=(a-1)-\dfrac{1}{2}(a-1)^2+\dfrac{1}{3}(a-1)^3-\dfrac{1}{4}(a-1)^4+\cdots\cdots$

第二十六款. 於上式,令 $p_1x=1$, 卽 $x=\dfrac{1}{p_1}$,

則 $a^{\frac{1}{p_1}}=2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots$

令 $a^{\frac{1}{p_1}}=e$, 則 $a=e^{p_1}$; 而 $\log_e a=p_1$.

$\therefore$ $a^x=1+x(\log_e a)+\dfrac{x^2}{1\cdot2}(\log_e a)^2+\dfrac{x^3}{1\cdot2\cdot3}(\log_e a)^3+\cdots\cdots$

上式令 $a=e$, 因 $\log_e a=\log_e e=1$,

$$\therefore \qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots. \qquad (1)$$

又 $$\log_e a=p_1=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\cdots\cdots. \qquad (2)$$

以 n 代 a, 則

$$\log_e n=(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\cdots\cdots$$

又從第六款知有 e 底之對數表, 欲變之為 a 底之對數表, 只須以常乘數 $\frac{1}{\log_e a}$ 乘之卽得, 故

$$\log_a n=\frac{1}{\log_e a}\cdot\log_e n.$$

則 $$\log_a n=\frac{1}{\log_e a}\cdot\left\{(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\cdots\cdots\right\}$$

上式如 $n>2$, 則為發級數, 惟有數種巧法, 能變其形, 使為斂級數.

第二十七款. 證 $e=2+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$ 為無盡之數.

因 $$\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots=1<1,$$

則 $3>e>2$.

設 e 等於可通約之數 $\frac{m}{n}$, 則

$$\frac{m}{n}=2+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}+\frac{1}{\underline{|n+1}}+\cdots\cdots$$

兩邊以 $\underline{|n}$ 乘之,則 $m\,\underline{|n-1}=N+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$+\cdots\cdots$$

而 N 爲整數,惟 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$+\cdots\cdots<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}$$

$$+\cdots\cdots<\frac{1}{n}.$$

則可知若將小於 $\frac{1}{n}$ 之分數與 N 相加,而云其和必可爲整數,則於理不合也.所以知 e 必爲無盡之數.

$$e=2+0.5+0.199999+0.041666+0.008333+0.001388+\cdots\cdots$$
$$=2.7182818.$$

第二十八款."求對數級數 $\log_a(1+x)$ 之値".

$\log_a x$ 不能化爲有 $A+Bx+Cx^2+\cdots\cdots$ 之形.因令 $x=0$,則 $\log_e x$ 變爲無窮故也.惟 $\log_a(1+x)$ 則能變得此形之級數,因 $x=0$ 時,其式亦能爲 0,所以其式中不能有不與 x 相關之項,又不能有 x 之負方之項,則得 (1) 式如下:

$$\log_a(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots\cdots$$

若令 $x=x+y$, 則得

$\log_a(1+x+y)=A(x+y)+B(x+y)^2+C(x+y)^3+\cdots\cdots$, 此爲 $\log_a(1+x+y)$ 之第一式, 惟因

$$1+x+y=(1+x)\left(1+\frac{y}{1+x}\right),$$

故 $$\log_a(1+x+y)=\log_a(1+x)+\log_a\left(1+\frac{y}{1+x}\right).$$

若於 (1) 式, 令 $x=\frac{y}{1+x}$, 則得

$$\log_a(1+x+y)=\log_a(1+x)+\frac{Ay}{1+x}+\frac{By^2}{(1+x)^2}+\frac{Cy^2}{(1+x)^3}+\cdots,$$

此爲 $\log_a(1+x+y)$ 之第二式. 因兩式中 y 之係數必相等,

即 $$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdots\cdots=\frac{A}{1+x}.$$

兩邊各乘 $(1+x)$, 又化之得

$$(A+2B)x+(2B+3C)x^2+(3C+4D)x^3+\cdots\cdots=0.$$

因 x 爲未定之數, 故可令 $A+2B=0, 2B+3C=0, 3C+4D=0,\cdots\cdots$

則 $$B=-\frac{1}{2}A,\ C=\frac{1}{3}A,\ D=-\frac{1}{4}A,\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \log_a(1+x)=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right)$$

如令 $1+x=a$, 則

$$\log_a a = 1 = A\left\{(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= A \log_e a.$$

$$\therefore \quad \log_a(1+x) = \frac{1}{\log_e a}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots\right).$$

第二十九款."又法證上款之結果".

因 $\frac{\log_a(1+x)}{x} = A\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots\cdots\right)$, 如 $x=0$,

則 $A = \frac{\log_a(1+x)}{x}$.

若令 $x = \frac{1}{n}$, 則 $\frac{\log_a(1+x)}{x} = n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$= \log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

惟因 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots\cdots$

$$= 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right) + \cdots$$

若令 $n=\infty$, 則 $x=0$, 而式之右邊為 e 之同數.

$2 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \cdots\cdots$, 由第六款知 $A = \log_a e = \frac{1}{\log_e a}$.

$$\therefore \quad \log_a(1+x) = \frac{1}{\log_e a}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots\right)$$

又若令 $a=e$, 即得 $\log_e a = \log_e e = 1$

則 $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$

第三十款. "對數較之原則".

如 $\log_{10}(n+d)-\log_{10}n=\log_{10}\left(1+\frac{d}{n}\right)=\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{d}{2n}+\frac{d^2}{3n^2}-\cdots\cdots\right)=\mu\frac{d}{n}.$

此因 n 為大數, d 為小數, 則括弧內之乘數, 可棄之不用. 若 $d=1$,

則 $\log_{10}(1+n)-\log_{10}n=\mu\frac{1}{n}.$

惟因 $\log_{10}(1+n)-\log_{10}n$ 為表中相連兩對數之較, 如令此表中之較數為 S,

則 $\log_{10}(1+n)-\log_{10}n=dS.$

卽 $\log_{10}(n+d)=\log_{10}n+dS$. 依此式可從本數之上下兩數, 而得本數之對數. 反之, $\log_{10}(n+x)-\log_{10}n$ 為已知之數, 而等於 S', 則 $d=\frac{S'}{S}$, 將此分數加於 n, 卽成 n 與 $n+1$ 間兩對數之中相配之真數內分數.

第三十一款. "求前所差之限".

因 $\log(n+d)-\log n$ 在 $\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{d}{2n}\right)$ 與 $\mu\frac{d}{n}$ 之間, 則所差者必在 $\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$ 與 $\mu\frac{d}{n}$ 之內, 所以此二式, 卽可為其差

之限．又易知其略近之同數dS必在極大極小之限內.若令$dS=\log(n+d)-\log n$,則所有之差,必小於$\frac{\mu d}{2n^2}$,若$n>100000$,而$d<1$,則其分數必小於$\frac{0.43}{200000000}$,即小於第八位小數之$\frac{1}{4}$,可見其差必不能入所求對數之七位小數以內.

又令$d=\frac{S'}{S}$,則所差爲$\frac{dS-S'}{S}$,則依前理,其所差必小於$\frac{\mu d}{2n^2S}$,惟因$S>\frac{\mu}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$,換言之$d-\frac{S'}{S}<\frac{d}{2n-1}$,$d-\frac{S'}{S}<\frac{1}{2000}$,惟此因$n>10000$方能得此,若$\frac{S'}{S}$爲$d$之同數,其差與所求得之首四位小數可不相關.

第三十二款."對數之計算".

$$\log_e(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots,$$

以 $-x$代x得

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots,$$

而 $$\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left\{\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right\}$$

又令 $$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{m}{n},\text{則}x=\frac{m}{2m+n}.$$

惟因 $\log_e\left(1+\frac{m}{n}\right)=\log_e\left(\frac{m+n}{n}\right)=\log_e(m+n)-\log_e n.$

$$\therefore\quad \log_e(n+m)=\log_e n+2\left\{\frac{m}{2n+m}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m}{2n+m}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{m}{2n+m}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

如令 $m=1$, 則

$$\log_e(n+1)=\log_e n+2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\cdots\right\}\quad(1)$$

第三十三款. 設 $\frac{m}{n}=\frac{1+x}{1-x}$, $\therefore\ x=\frac{m-n}{m+n}$. 則

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

如 $m=x^2$, $n=x^2-1$, 則 $\frac{m-n}{m+n}=\frac{1}{2x^2-1}$,

而 $\log_e\left(\frac{m}{n}\right)=2\log_e x-\log_e(x-1)-\log_e(x+1)$,

$$\therefore\quad \log_e(x-1)=2\log_e x-\log_e(x-1)-2\left\{\frac{1}{2x^2-1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3-\cdots\cdots\right\}\quad(3)$$

用此式若已有相連之兩數 $x-1$, 與 x 之訥對, 則可求

相連第三數 $x+1$ 之訥對.

(21) 對數表引說一卷,用對數表訣一卷,造對數表法一卷,朱湘澄撰,未刊.[33]

20. 代數術補式,算式解法,有不爲齋算學,對數旁通,對數較表,對數捷法,對數淺釋,對數四問.

(22) 代數術補式二十二卷,解崇輝撰(1899),蓋爲解析代數術而作.

(23) 算式解法十四卷,美國好敦司開奈利同撰,英國傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述,第八卷論對數.[34] 光緒二十五年(1899)刻.[35]

(24) 傅九淵有不爲齋算學卷三"對數表開方較省算法解"稱:"作對數法遞次開方,以求假數,用前後各次所得數相較[見數理精蘊]最爲簡妙".

"蓋各次開方首位之數并爲1,首位以下空位漸多,則後次開方數(E_{n+1}),與前次開方數(E_n),略近

(33) 見劉鐸古今算學書錄"乘數第三"第十五頁,光緒戊戌(1898)印本.

(34) 見江南製造局譯書提要卷二,第三十六至三十七頁.

(35) 見江南製造局記卷二,第十九頁.

$\frac{1}{2}$，於是以前次開方數二歸之$\left(\frac{1}{2}E_n\right)$，與後次開方數$(E_{n+1})$相課，則後一次開方數内，必少本次開方所減之隅冪半段.”

求第一較： 因$\left(1+0.\overset{n}{0}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+0.\overset{m}{0}\beta\right)$

或
$$1+0.\overset{n}{0}\alpha=1+2\times0.\overset{m}{0}\beta+\overline{0.\overset{m}{0}\beta}^{2}$$

卽
$$\frac{0.\overset{n}{0}\alpha}{2}=0.\overset{m}{0}\beta+\frac{\overline{0.\overset{m}{0}\beta}^{2}}{2}$$

或
$$\frac{0.\overset{n}{0}\alpha}{2}-0.\overset{m}{0}\beta=\frac{\overline{0.\overset{m}{0}\beta}^{2}}{2}$$

卽
$$\frac{E_{n-1}}{2}-E_n=\alpha_{n\cdot1} \qquad ($$

而E_{n-1}爲前次開方數，開方數俱不用首位.

E_n 爲本次開方數，

$d_{n\cdot1}$ 爲本次第一較.

求第二較：

又因
$$\frac{E_{n-1}}{2}=E_n+d_{n\cdot1} \qquad ($$

自乘之得
$$\frac{\overline{E_{n-1}}^{2}}{4}=\overline{E_n}^{2}+2\,E_n\cdot d_{n\cdot1}+\overline{d_{n\cdot1}}^{2},$$

即 $$\frac{1}{4}\cdot\overline{\frac{E_{n-1}}{2}}^2-\overline{\frac{E_n}{2}}^2=E_n\cdot d_{n\cdot1}+\overline{\frac{d_{n\cdot1}}{2}}^2,$$

或 $$\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot1}-d_{n\cdot1}=d_{n\cdot2}. \qquad (2)$$

而 $d_{(n-1)\cdot1}$ 爲前次第一較

$d_{n\cdot1}$ 爲本次第一較

$d_{n\cdot2}$ 爲本次第二較.

求第三較:

又因 $$E_n+d_{n\cdot1}=\frac{E_{n-1}}{2} \qquad (1)$$

$$d_{n\cdot1}+d_{n\cdot2}=\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot1} \qquad (2)$$

則從 (1) 及 (2) 相乘得

$$\frac{1}{8}E_{n-1}\cdot d_{(n-1)\cdot1}-E_n\cdot d_{n\cdot1}=E_nd_{n\cdot2}+\overline{d_{n\cdot1}}^2+d_{n\cdot1}\cdot d_{n\cdot2}. \qquad (A)$$

又從 (2) 自乘得

$$\frac{\frac{1}{8}\overline{d_{(n-1)\cdot1}}^2}{2}-\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot1}}^2=\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot1}}^2+2d_{n\cdot1}d_{n\cdot2}+\overline{d_{n\cdot2}}^2 \qquad (B)$$

$(A)+(B)$ 得

$$\frac{d_{(n-1)\cdot2}}{8}-d_{n\cdot2}=E_n\cdot d_{n\cdot2}+1\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot1}}^2+3d_{n\cdot1}d_{n\cdot2}+\overline{d_{n\cdot2}}^2=d_{n\cdot3}$$

(3)

而 $d_{(n-1)\cdot 2}$ 爲前次第二較

$d_{n\cdot 2}$ 爲本次第二較

$d_{n\cdot 3}$ 爲本次第三較.

求第四較:

因
$$E_n+d_{n\cdot 1}=\frac{E_{n-1}}{2} \tag{1}$$

$$d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 3}=\frac{1}{8}d_{(n-1)\cdot 2} \tag{3}$$

$$d_{n\cdot 1}+d_{n\cdot 2}=\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot 1} \tag{2}$$

則從 (1), (3) 相乘得

$$\frac{1}{16}E_{n-1}\cdot d_{(n-1)\cdot 2}-E_n\cdot d_{n\cdot 2}=E_n\cdot d_{n\cdot 3}+d_{n\cdot 1}\cdot d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 3}. \tag{C}$$

又從 (2) 自乘, 又各乘 1.5 得

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{2}\overline{d_{(n-1)\cdot 1}}^2-\frac{3}{2}\overline{d_{n\cdot 1}}^2=3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+\frac{3}{2}\overline{d_{n\cdot 2}}^2 \tag{D}$$

又從 (2), (3) 相乘, 又各乘 6 得

$$\frac{3}{16}\cdot d_{(n-1)\cdot 1}d_{(n-1)\cdot 2}-3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}=3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+6d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 3}+6\overline{d_{n\cdot 2}}^2+6d_{n\cdot 2}d_{n\cdot 3}\quad. \tag{E}$$

又從 (3) 自乘, 又各乘 4 得

$$\frac{1}{16}\overline{d_{(n-1)\cdot 2}}^2-\overline{d_{n\cdot 2}}^2=\overline{3d_{n\cdot 2}}^2+8d_{n\cdot 2}d_{n\cdot 3}+\overline{4d_{n\cdot 3}}^2 \tag{F}$$

(C)+(D)+(E)+(F) 得

$$\frac{1}{16}\left\{E_{n\cdot1}d_{(n-1)\cdot2}+\frac{3}{2}\overline{d_{(n-1)\cdot1}}^2+3d_{(n-1)\cdot1}d_{(n-1)\cdot2}+\overline{d_{(n-1)\cdot2}}^2\right\}$$

$$-\left\{E_nd_{n\cdot2}+1\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot1}}^2+3d_{n\cdot1}d_{n\cdot2}+\overline{d_{n\cdot2}}^2\right\}=E_nd_{n\cdot3}$$

$$+7d_{n\cdot1}d_{n\cdot2}+7d_{n\cdot1}d_{n\cdot3}+10\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot2}}^2+14d_{n\cdot2}d_{n\cdot3}$$

$$+4\overline{d_{n\cdot3}}^2$$

即 $$\frac{1}{16}d_{(n-1)\cdot3}-d_{n\cdot3}=d_{n\cdot4} \tag{4}$$

而 $d_{(n-1)\cdot3}$ 爲前次第三較

$d_{n\cdot3}$ 爲本次第三較

$d_{n\cdot4}$ 爲本次第四較.

(25) 對數旁通一卷爲思棗室算學新編四種之一,無錫將士棟撰,前有華世芳光緒丁酉(1897)序文一篇.書中稱: $10^{\frac{1}{2}(n+1)}=1+E_{n+1}$, $E_{n+1}:\frac{1}{2^{(n+1)}}=1:\mu$. 就中10爲常對數之底.數理精蘊(3)"用遞次開方求假數法"(c)即用此法對數根μ.如已知μ亦可反求得E_{n+1}及10矣.

(26—29) 廖家授(1860—1890)撰對數較表一卷存於家.陸采撰對數捷法一卷,見杭州藝文志.江衡撰對數淺釋一卷爲溉齋算草之一.劉彝程撰對數四

問,見經世文續編.

(三) 對數之東來下[36]

21. 對數輸入日本之經過

日本林鶴一以爲對數由中國數理精蘊輸入日本約在享保六年(1721),因此時德川吉宗亦重曆算者也.惟上文攷出數理精蘊實成於雍正癸卯(1723),則輸入日本當稍後於享保六年矣.其後又由荷蘭直接輸入.今其國中所藏論著對數之書計有:

(1) 數理精蘊(印本,鈔本).

(2) 不朽算法(鈔本),安島直圓著,日下誠編.

(3) 眞假數表(鈔本),安島直圓著.

(4) 眞假數表術解(鈔本).

(5) 對數表起源(鈔本)與(3)內容略同,又與(6)全異.

(6) 對數表起源(鈔本),會田安明著.

(7) 對數表(鈔本),堀田泉尹著(1814).

(36) 參看林鶴一:和算ニ於ケル對數,東北數學雜誌第二十一卷,第一,二號,日本,仙臺,1922.第148—190頁.

(8) 作對數表法(鈔本),篠原善富著(1823).

(9) 加減代乘除表(印本),阪部廣胖著,馬場正督訂(1824).

(10) 對數表製法(鈔本),石黑信由著(1829).

(11) 算法對數表(印本),小出修喜編,福田理軒校(1844).

(12) 對數表精解(鈔本,印本),因田恭著,竹村好博編(1854).

(13) [算法捷徑]乘除對數表(印本),惠川景之著(1857).

(14) 對數表(鈔本),著作人及時代未詳.

(15) [新編]加減表,一名對數表(鈔本),阿部有清著(1860).

(16) 對數表(印本),關口開著,時代未詳.

(17) 數率六線率表(印本).

(18) 乘除對數表(鈔本),又[大測]加減代乘除表,大測表卷之三,或稱大村一秀著.

22. 不朽算法,眞假數表及對數表起源

(1) 關流正統第四傳安島直圓(1739—1798,或

1733－1800)之第五傳日下誠(1764－1839)於其師安島去世之翌年(1799),編集其師遺著,成不朽算法上下卷,上卷論圓理,下卷論對數之起源,角術等,并及留島義太(?－1757)之平方零約術.上卷第十二問載與對數相關之題.因此問爲三角形自頂作n斜線,則內容n等圓之全徑爲

$d=h\left(1-\sqrt[n]{1-\frac{D}{h}}\right)$,而$h$=自頂至底線之垂線,$D$=內容圓全徑.

其卷下稱:

或曰,第十二問,三斜,內容等圓術,界斜數十,則開方乘數,亦數十乘方,得商數不容易,可謂無用之術乎.答曰,予有新案,如下文.

術曰:眞數一者配數空,眞數[一十者,十分者]各配數一.眞數[一百者,一釐者]各配數二.眞數[一千者,一毛者]各配數三.如此眞數上下每進退一位,配數增一.依比例得所求配數.其術曰:置[一十],九乘方開之,得商爲配數[一分]之眞數[名法],置[一十]以法除之,爲配數[九分]之眞數.以法除之,爲配數[八分]之眞數.以法除之,爲配數[七分]之眞數.次第如此以法累除之,而求到配數[二分]之眞數而止.

置配數[一分]之眞數,九乘方開之,爲配數[一厘]之眞數[名法],置配數[一分]之眞數.以法除之,爲配數[九釐]之眞數.以法除之,爲配數[八釐]之眞數.以法除之,爲配數[七釐]之眞數.如前法以法累除之.求到配數[二釐]之眞數而止.

置配數[一釐]之眞數,九乘方開之,爲配數[一毛]之眞數.依前術求到,超於配數[九毛]之眞數.至[二毛]之眞數而止.[餘倣此].

所稱配數卽對數也,如

眞數		配數
1		0
10	0.1	1
100	0.01	2
1000	0.001	3
......	......	......

是也,而配數之正負,不復計及.

其求配數之法,如

$\sqrt[10]{10}$ $=\log^{-1} 0.1$ (以配數一分之眞數爲法),

$\dfrac{10}{\sqrt[10]{10}}$ $=\log^{-1} 0.9$ (配數九分之眞數),

$$\frac{10}{\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10}}}=\log^{-1}0.8$$ (配數八分之眞數).

……………………………………

$$\frac{10}{\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10}}}}}}}}}}$$ (配數二分之眞數).

次

$$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}=\log^{-1}0.01$$ (以配數一釐之眞數爲法)

$$\frac{\sqrt[10]{10}}{\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}}=\log^{-1}0.09$$ (配數九釐之眞數)

$$\frac{\sqrt[10]{10}}{\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\cdot\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}}=\log^{-1}0.08$$ (配數八釐之眞數).

……………………………………

由此得

眞　數	配　數
7.9423823472428	0.9
6.3095734448019	0.8

5.0118723362727	0.7
3.9810717055350	0.6
3.1622776601684	0.5
....	......
1.2589254117942	0.1
1.2302687708124	0.09
....	......
1.0002072541335	0.00009
....	....
1.0000000000046	0.000000000000002
1.0000000000023	0.000000000000001

如求 log 2. 因原表眞數之値至複雜，而其配數之値反簡單，然亦可求整數之配數. 其義一如戴煦對數簡法(1) "有開方表徑求諸對數" 之法，例如

$$\log 2=\log 1.9952623149698\times\frac{2}{1.995\cdots698}$$

$$=\log 1.9952623149698\times 1.0023744672545 29$$

$$=\log 1.9952\cdots9698\times\log 1.0023052380779$$

$$\times\frac{1.002374467254529}{1.0023052380779}$$

$$=\log 1.9952\cdots9698\times\log 1.0023\cdots0779$$

$$\times 1.000069065952 94.$$

$$=0.3+0.001+0.0001+\cdots\cdots$$

$$=0.3010295663.$$

至有配數求眞數,如已知配數2.56求眞數.已因知配數2之眞數 $=100=a$,配數0.5之眞數 $=3.1622776601684=b$,配數0.06之眞數 $=1.148153621 4969=c$,則所求之眞數爲 $a.b.c.$

眞假數表亦爲安島所編,未詳年代.對數表起源有與安島眞假數表內容相同者.

23. 對數表起源.作對數表法.加減代乘除表.

(1) 會田安明(1747-1817)之對數表起源,與安島直圓之對數表起源書名相同,而內容全異.書中言眞數2之假數1,眞數4之假數2,眞數8之假數3,并謂

眞數相乘者假數相加而相對. $\log ab=\log a+\log b.$

眞數相除者假數相減而相對. $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$

眞數開平方者假數二除而相對. $\log\sqrt{a}=\frac{1}{2}\log a.$

眞數開立方者假數三除而相對. $\log\sqrt[3]{a}=\frac{1}{3}\log a.$

眞數開三乘方者假數四除而相對. $\log\sqrt[4]{a}=\frac{1}{4}\log a.$

又立小表如

眞數	2	4	8	16	32	64	128	……
假數	1	2	3	4	5	6	7	……

蓋會田先求2爲底之對數,其術一如數理精蘊內"用中比例求假數法". 如求 log 3,先由 log 2=1,log 4=2 起數.

$\sqrt{2\times4}=2.82842+$[第一眞數,少率 (1)].(37)

則 $\log 2.82842+=\frac{1}{2}(\log 2+\log 4)=1.5$ [第一假數].

次因 $\sqrt{\text{第一眞數}\times4}=3.36358+$[第二眞數,多率 (1)].

則 $\log 3.36358+=\frac{1}{2}(\log 4+\log 1.5)=1.75$ [第二假數].

(37) 關於多少率之說,詳見東北數學雜誌第六卷內林鶴一"零約術ト我國於ケル連分數論發達"論文.

復次 $\sqrt{\text{少率}(1)\times\text{多率}(1)}=3.084421+$[第三眞數,多率(2)].

則 $\log 3.084421+=\frac{1}{2}$(第一假數+第二假數)$=1.625$ [第三假數].

復次 $\sqrt{\text{少率}(1)\times\text{多率}(2)}=2.9536+$[第四眞數,少率(2)].

則 $\log 2.9536+=\frac{1}{2}$(第一假數+第三假數)$=1.5625$ [第四假數].

逐次如是,至第十次得:

第十眞數 $=2.9999967198$ (少率)

第十假數 $=1.5849609375$

故 $\log_2 3=1.584961$

同理 $\log_2 5=2.321920,\quad \log_2 7=2.80735,$

$\log_2 11=3.459426,\quad \log_2 10=3.32192.$

如欲得10爲底之對數,可以下式得之.

$$\log_{10} 2=\frac{1}{\log_2 10}\cdot\log_2 2=0.30103.$$

(2) 作對數表法爲篠原善富,文政六年(1823)所著.篠原善績中算,文化十三年(1816)著三角法擧要.文政二年(1819)著周髀算經圖字解.其作對數表法

蓋完全髀販數理精蘊之說，一如陳杰之算法大成之例.

(3) 加減代乘除表爲阪部廣胖(–1824)所著.附於文化七年(1810)所著算法點竄指南錄第十二卷內.爲一至三百之對數小表.佐久間光豹復爲補成三百至千二百之對數小表.

24. 對數表製法.對數表精解

(1) 對數表製法爲石黑信由(1760–1836),文政十二年(1829)所著.其法先求眞數之四位假數,次及六位,復次爲八位,逐次偪近,得其眞值.

(甲) 先求四位之表.

眞數	7	10	100	……
假數	0000	1000	2000	……

又

眞數	2	4	8	5	………
假數	0300	0600	0900	0700	………

上表蓋設眞數2之假數爲0300.

故眞數4之假數爲0600,亦爲眞數2之假數2倍;

又眞數8之假數爲0900,亦爲眞數2之假數.及4之假

數之和;又眞數5之假數爲0700,亦爲眞數2之假數及10之假數之較.

次以3爲2與4中間之數,乃以2之假數,與4之假數相加折半爲3之假數卽0450.由是9之汎假數爲0900.但上表明言8之假數亦爲0900,由是9之假數當以8之假數,與10之假數相加折半得爲0950,今倍之得1900爲81之假數.又以8之假數,與10之假數相和得80之假數,亦爲1900.但在理此兩數不應相同,由是加不定加數(irregular additor)於9之汎假數,是爲0.952.[38] 既得9之假數,可推得3與6之假數,如:

眞　數	9	3	6	………
假　數	0952	0476	0776	………

復次求7之假數,由6之假數與8之假數相加折半得爲0838.今倍之得1676爲49之汎假數,又以6之假數,與8之假數相加得48之假數,亦爲1676.但在理兩數不應相同,是知兩者均不合,因另以5之假數與10之假數相加得1700,又以48之假數與50之假數相加折半得1688爲49之汎假數.另加不定加數0002是爲49

(38) 石黑信由以何理由得不定加數,至今尙無確解.

之假數，如：

眞　數	49	7	
假　數	1690	0845	

同理得下列之表，就中差爲連續二假數之差，不定加數(卽前後平均而外之不定加數)爲連續三假數內，前後兩假數相加折半，與中央假數之差.表中除有附尾之5外，其不定加數皆漸次細小.如設2之假數爲0201則不定加數之漸次細小，更爲有序.

眞　數	假　數	差	不定加數
1	0000	0300	0000
2	0300	176	62
3	0476	124	26
4	0600	100	12
5	0700	76	12
6	0776	69	$03\frac{5}{}$
7	0845	55	07
8	0900	52	$1\frac{5}{}$
9	0952	48	2

10	1000	39	4^{5}—
11	1039	37	1
12	1076	35	1
13	1111	34	0^{5}—
14	1145	31	1^{5}—
15	1176	24	3^{5}—
16	1200	27	1^{5}—負
17	1227	25	1
18	1252	25	0
19	1277	23	1
20	1300	21	1

次求六位之表，以下二小表爲基礎，即：

眞　數	1	10	100	1000	
假　數	000000	100000	200000	300000	

眞　數	2	4	8	5	
假　數	030103	060206	090309	069897	

最後求八位之表，以下二小表爲基礎，即：

眞數	0	10	100	1000	
假數	00000000	10000000	20000000	30000000	

眞數	2	4	8	5	
假數	03010300	06020600	09030900	06989700	

(2) 對數表精解爲關流正統第六傳內田恭(1805–1882)所著，其弟子竹村好博，安政元年(1854)所增修，書中以數理精蘊累乘比例，義頗繁雜，因如不朽算法先設，

眞數	假數
1	0
10	1
100	2
1000	3
……	……

次以

眞數	假數
$\sqrt[10]{10}$	0.1
$\left(\sqrt[10]{10}\right)^2$	0.2
$\left(\sqrt[10]{10}\right)^3$	0.3
....	......
$\left(\sqrt[10]{10}\right)^{10}$	1.0
$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}$	0.01
$\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)^2$	0.02
....	......
$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)}$	0.001
$\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)}\right)^2$	0.002
....	......

其進行之方法,又與不朽算法稍異.

25. 算法對數表.乘除對數表.對數表

(1) 算法對數表爲小出修喜(1797-1865)所編,麗

田理軒校.小出爲德島藩士,是書於弘化元年(1844)刊行.對數初入日本,羣相珍祕,自此書出,對數法始廣傳焉.其書疑爲荷蘭人所輸入,因卷中信田貞秀誌語曾題荷蘭之對數表譯名焉.

(2) 乘除對數表爲安政四年(1857)惠川景之所著,乃鈔錄西曆1831年毗辣兒(J. C. Pilaar)航海書中之一萬以下四位對數表,幷列差數表.毗辣兒爲荷蘭人.

(3) 對數表由關口開(1842—1884)署簽,作書年代未詳,大約採自英,美書.具小數六位.明治初期,日人多用六,七位對數表,此書疑出於此時矣.

十五年,十一月,二十日,於靈寶

中算輸入日本之經過

日本遠藤利貞補修日本數學史,分該國數學史爲五紀:第一紀起神代迄宣化(536 A. D.),號爲日本上古之數學;第二紀起欽明(554)迄元和(1615-1623),號爲支那數學採用之時代;第三紀起元和迄延寶年間(1673-1680),號爲日本數學之再興時代;第四紀起延寶迄明和(1781-1788),號爲日本數學之新發時代;第五紀起明和迄明治十年(1877),號爲日本數學之高進時代;實則各紀中均有中算輸入之形迹,不獨一二紀如是,卽三四五紀亦然.(註1)

日本神代之事,其詳不得而知.其在吾國,則記

(註1) 遠藤利貞遺著增修日本數學史,大正七年日本巖波書店出版,以後簡稱增修遠史.

數之法,說文所記,十十爲百,十百爲千,十千爲萬,一十百千萬,謂之五數.日本上古記數,萬以下亦取此記法.萬以上,則以萬萬進.三上義夫疑其傳自吾國.按西曆紀元前三十三年任那始入朝於日,任那在今朝鮮慶尙道之西南,此爲日韓交通之始.厥後神功皇后(201—270 A. D.)用兵新羅,而間接得與吾國交通.華民亦多移居於日.舉凡簿籍計算,與建築,工藝,佛法,均於此時間接輸入.(註2)

第二紀爲吾國數學輸入最顯著之時代.欽明十五年(554 A. D.),百濟易博士王道良,曆博士王保孫始以中國曆法輸入日本.於是改良度量衡制,置漏刻器,立天文臺,行元嘉曆及儀鳳曆,一惟中土之法是遵.大寶二年(702),立學校,授算術,所採算經十書,爲周髀,孫子,六章,三開,重差,五曹,海島,九司,九章,綴術,幷置曆士,算生,等名稱.先是,推古十五年(607),日皇遣小野妹子入使於隋.日後中日僧侶,商舶,多所往來;直至元代弘安之役(1281),中日交通,始

(註2) 增修遼史三至五葉.徐宗穉周葆鑾共譯日本和田垣謙三世界商業史一八七至一九五葉.

形阻隔.而中算在日本之影響,已可得以言.徵諸日本最古算書口遊之所記載,更屬可信.(註 3)

口遊一書,附有天祿元年(970)冬十二月二十七日源爲憲序文,蓋爲教授當時參議藤原爲光七歲長子松雄而作.所記九九,始九九迄一一,與孫子算經之次序相同.今據舊寫本(1263)移錄九九之序如次:

九九八十一　八九七十二　七九六十三
六九五十四　五九四十五　四九三十六
三九二十七　二九十八　一九九

八八六十四　七八五十六　六八四十八
五八四十　四八三十三(按三當爲二之誤)
三八二十四　二八十六　一八八

七七四十九　六七四十二　五七三十五
四七二十八　三七二十一　二七十四
一七七

六六三十六　五六三十　四六二十四
三六十八　二六十二　一六六

(註 3) 增修遼史六至十一葉.徐周譯世界商業史

五五二十五　四五二十　三五十五

二五十　一五五

四四十六　三四十二　二四八

一四四

三三九　二三六　一三三

二二四　一二二

一一一

孫子算經,末有孕婦難月一問,題曰:

今有孕婦,行年二十九,難九月,未知所生.

答曰:生男.

術曰:置四十九,加難月.所除以天除一,地除二,人除三,四時除四,五行除五,六律除六,七星除七,八風除八,九州除九.其不盡者,奇則爲男,耦則爲女.

口遊人事篇,亦有類似之問題,如:

今有姙婦可生子,知男女法.

術曰:置婦女年數,(自生年至姙年)加十二神爲實.可際(按際當爲除之誤)天一,地二,人三,四時,五行,六神,七皇,(按皇當爲星之誤)八風,九宮.殘一三五七(爲陽男也)二四六八(爲陰女也)一死(此字疑有誤)以九除也.

此外則有「有病者不知死生」及「今有人死生知術」二項:

置九九八十一,加十二神得九十三,更加病者年數,所得以三除之.若有不盡者,男死女不死.若無不盡者,女死男生云.置八十一,加十二神,又加十二月,又將病者年若干,幷以三除.若有算殘者不死,不遺死.

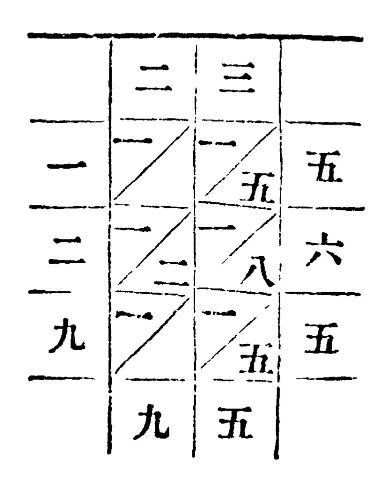
此二項不見於孫子算經.惟孫子之孕婦難月題適在篇末,或其所附記年久缺佚,而留入日本者,幸得保存,未可知也.復有竹束問題,爲等差級數求總和,亦與孫子算經之「今有方物一束」約略相同.(註4)

第三紀中算之輸入,尤爲重要.明萬曆二十年(1592)日本豐臣秀吉遣舟師數百艘渡海,陷朝鮮之釜山,朝鮮告急.其翌年明師敗,尋議和.厥後互有勝敗.至二十六年七月(1598),豐臣秀吉死,朝鮮之事乃

(註4) 三上義夫九九ニ就キテ,東洋學報第十一卷第一號一〇二至一一八葉,日本.

三上義夫第三回總會ニ陳列セル和算書解題,日本中等教育學會雜誌第四卷第一號第三葉,日本.

平.而程大位之算法統宗(1593),亦於斯役輸入日本焉.豐臣秀吉之臣毛利重能爲首傳算法統宗者.或謂毛利曾入學於明.延寶四年(1676)復刻本算法統宗跋語,有:「算法統宗有渡唐而以來,世久褒用」之語,或以爲毛利來華之證.豐臣既歿,毛利隱於日之京都,開館授徒,從者數百人.所著有算書(1622),歸除濫觴二卷,及割算一書,蓋皆述中國珠算之法也.毛利復以其筆錄之算法書十八卷,與其徒吉田光由(1598-1672).寬永四年(1627),吉田著塵刦記.其後今村知商復著豎亥錄(1639),因歸算歌(1640).延寶三年(1675)湯淺得之尙翻刻算法統宗,幷加註釋,稱爲算法統宗訓點.元祿七年(1694)鈴木重次著算法重寶記,其納音之法,與因乘之圖,亦出於算法統宗.卽因乘之題問與圖,亦與算法統宗卷十二寫算之因乘圖相類.今譯於下:



問綿布二十三端,每端五兩六分五釐之銀.

答曰,百二十九兩九分五釐.

其解法列圖如上:

方陣之事,日人習者至夥.其基本定理,多導源於算法統宗.其同時輸入日本者,爲中國算盤.文祿年間(1592—1596),前田利家在名護屋陣中所用之算盤,尚流傳至今.盤長四寸二分五釐,寬二寸三分,高四分.黑檀木製,凡九檔,梁上二珠,梁下五珠,盤珠略作稜形.其後大津製造算盤,爲用更廣.(註5)

元朱世傑所著算學啓蒙,亦於明末由朝鮮間接輸入日本.是書流傳於朝鮮者,有洪武年刻本.至

(註5) 增修遼史四三至六六葉,一三二葉,一七六至一七七葉.

三上義夫文化史上ヨリ見タル日本ノ數學,哲學雜誌第三十七卷四百二十一號十一葉至十二葉,又四百二十二號二十九至三十葉,日本.

林鶴一,和算ニ於ケル通俗書塵刧記及ヒ改算記,東北數學雜誌第十六卷二十六至三十七葉,大正八年(1919)日本仙臺.

三上義夫和算之方陣問題,日本帝國學士院,大正六年(1917)日本東京出版.

三上義夫第三回總會ニ陳列セル和算書解題八至九葉.

清順治十七年(1660),朝鮮金始振重刊行世.其在日本,則萬治元年(1658)已有吉田光由門人久田玄哲詳註算學啓蒙,號爲算學啓蒙訓點.村松茂清以算學啓蒙法式雖有之,與和俗不洽,因於寛文三年(1663)著算俎.寛文十二年(1672),星野實宣以俗語解說,號算學啓蒙註解.元祿元年(1688)建部賢弘(1664—1739)著算學啓蒙諺解.(註6)

宋楊輝算法流傳於朝鮮者,有明洪武戊午(1378)古杭勤德書堂刊本.明宣德八年(1432)朝鮮觀察使者辛引孫奉內旨,囑慶州府尹金乙辛,判官李好信命工鋟梓,閱月而訖.顧其書流傳不廣,故金始振亦僅得其鈔本.而刻本尙有流入日本者,日本算聖關孝和(1642—1708)於寛文辛丑(1676),曾寫錄一部.若數學九章,四元玉鑑,測圓海鏡,亦有傳入日本之形迹.狩野亨吉謂相傳關孝和於奈良某寺,得讀中國算學書凡三年,似亦心得測圓海鏡之誼.因其級數

(註6) 增修遼史七八,八六,一〇四,一六八葉.

三上義夫第三回總會ニ陳列セル和算書解題九至十葉.

算學啓蒙金始振序.

開展法,與李冶求高次方程式方根之法相似也.(註7)

第四五紀日算精進,遠越前人.而受賜於天元學說之輸入,則無可疑.關孝和之剩一術,與宋秦九韶之大衍求一術,全相一致.卽其招差法,亦根於元郭守敬之相減相乘及三差之法.又所著大成算經,曾錄程大位之寫算乘法.其方陣之術,則師法楊輝,以關氏曾手錄是書也.關孝和之剪管術,於研幾算法自序,謂出於唐穆宗之宣明曆.厥後宅間能清一流,在十七世紀中葉,亦以招差法解析圓理,說詳宅間流圓理卷二.(註8)

明末清初西法輸入中國.第一期之代表著作,爲崇禎曆書,曆象考成,數理精蘊.第二期之代表著作爲梅氏曆算全書.至乾嘉時代,西法中止輸入,學

(註7) 本朝數學通俗講演集第六葉,明治四十一年(1908)日本東京.

算學啓蒙金始振序.

關孝和鈔本宋楊輝算法.

(註8) 增修遠史一四〇至一四一葉及二一二葉.

Y. Mikami. The Circle-measurement of the Takuma School, Tôkyô Sûgaku-Buturigakkwai Kiki. 2 series, Vol VII., No. 3, pp. 46—56, 1913.

者蒐輯古籍，乃有算經十書之刻.是時程大位寫算式之籌算，風靡中原.梅氏之籌算七卷(1678)，戴震之策算一卷(1744)，蓋其例也.此項算法，流入日本，亦得相當之影響.明和元年(1764)，山縣昌貞著牙籌譜，其自序謂：「牙籌舊明人之所製，便捷頗勝用算盤者.」其籌爲直者，共有九枚，另作零籌，都爲十籌，別置同樣者數枚，以便應用.明和四年(1767)千野乾弘著籌算指南，其籌爲橫者.是直襲梅氏之制，且其形式亦復相同.清戴震於乾隆三十八年(1773)至四十二年(1777)間，纂校周髀算經，九章算術，孫子算經，五曹算經，海島算經，五經算術，夏侯陽算術，先後以聚珍版刊行.其後曲阜孔繼涵乃并戴氏所校輯古算經，張丘建算經，及其所著策算，勾股割圜記作算經十書刊刻行世.寬政四年(1792)村井中漸翻刻吾術，夏侯國所傳入之五種算經：即孫子算經，五曹算經，海島算經，五經算陽算經.村井爲日本算學界老宿，早年曾著逢原新率勾股法(1760)，開商點兵算法(1765)等書.今僅刻此五種，或彼僅見聚珍版刊本各算經，而周髀九章當時尙有傳本.蓋天明五年(1785)川邊信一尙著周髀算經圖解，文政二年(1819)篠原善富亦

作周髀算經國字解也.(註9)

牙籌以外,弧三角,橢圓,對數亦輸入日本.惟此時日本尚一方受荷蘭學術之影響.是時安島直圓(1739—1799)著弧三角術解,蓋即註解梅文鼎曆算全書中環中黍尺之加減捷法.佐藤一清橢圓說詳之第一節,題爲「三國同題同術起原」.其第三解法,謂出自橢圓起源,說詳曆算全書卷中.至對數之初入日本也,習者相秘,不以授人.安島直圓卒後之翌年(1799),其門人日下誠(1764—1839)編集其遺稿.成不朽算法二卷;下卷言普通對數之起源.會田安明則別作對數,號會田對數.弘化元年(1844)小出修喜刊一至萬之普通對數表.昔日秘不授人之學術,今始克公諸世.其後十年,竹村好博與其門人內田五觀

(註9) 增修遵史三三八,三三九,三五〇,三五一,四〇二,四三二,五三九葉.

東戴原民國十三年北京晨報社出版.

拙著中國數學源流考略,北京大學月刊第一卷第五號六八至六九葉七一至七二葉,民國八年

共作對數表正解,其用益顯.(註10)

日本於垛積,圓理,研討極精,其基本觀念,亦多導源吾國.日人以關孝和流派之垛術,詳列下表,今可與宋元諸子,及清陳世仁垛積之說參較,以觀其源流.

圭垛或圭減垛	1.	2.	3.	4.	5.	………
三角衰垛或三角減衰垛	1.	3.	6.	10.	15.	………
再乘衰垛或再乘減衰垛	1.	4.	10.	20.	35.	………
三乘衰垛或三乘減衰垛	1.	5.	15.	35.	70.	………
”	”	”	”	”	”	”

奇零圭垛	1.	3.	5.	7.	9.	11.	……
奇零三角圭垛	1.	4.	9.	16.	25.	36.	……
奇零再乘圭垛	1.	5.	14.	30.	55.	91.	……
奇零三乘圭垛	1.	6.	20	50.	105.	196.	……
”	”	”	”	”	”	”	

註10) 增修遼史四五四至四五九葉,五二一至五二五葉,五六三至五六五葉,六一七至六一八葉,六三八至六四三葉.

林鶴一 安島萬藏ト松永良之介,東北數學雜誌第十一卷一七至三四葉,大正六年(1917),日本仙臺.

林鶴一 佐藤一清ノ[illegible]評[illegible],東北數學雜誌第十二卷一九〇至一九二葉,大正七年(1918)日本仙臺.

偶零圭垜	2.	4.	6.	8.………
偶零三角圭垜	2.	6.	12.	20.………
偶零再乘圭垜	2.	8.	20.	40.………
偶零三乘圭垜	2.	10.	30.	70.………
" " "	"	"	"	"
方垜	1^2.	2^2.	3^2.	4^2.…………
立垜	1^3.	2^3.	3^3.	4^3.…………
" " "	"	"	"	"

清初杜氏九術傳入中國,曾否流布日本,今無可考.而當日彼國於圓率之理,關孝和多所說述.關氏卒後建部賢弘校其遺編圓理弧背術得與杜氏相類之式

$$\frac{1}{4}(a)^2=ds\left\{1+\frac{2^2}{3.4}\left(\frac{s}{d}\right)+\frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}\left(\frac{s}{d}\right)^2+\frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}\left(\frac{s}{d}\right)^3 +\cdots\cdots\right\}$$

而 a 為弧背,d 為全徑,s 為矢.元文四年 (1739) 松永良弼著方圓算經,記錄關於圓率之級數八式,其一與

前同, 又三式附於杜氏九術.(註11)

同光時代, 西法復又傳入中國, 而間接輸於日本. 李善蘭偉烈亞力所譯代微積拾級(1857), 在日本曾有附註之翻刻本. 前之偉烈亞力數學啓蒙(1853), 亦於日本發見翻刻本, 題爲官版數學啓蒙. 中算輸入日本, 直至明治維新, 和算衰廢以後, 方告中止. 觀於上文所記, 則千餘年來中算對於日本之所造就, 可無遺憾矣.(註12)

(註11) 增修遼史二七七葉.

三上義夫和算史概觀, 日本東京物理學校雜誌別刷第十至十一葉, 明治四十三年(1910).

拙著中國數學源流考略, 北京大學月刊第一卷第五號六九至七一葉, 民國八年.

Kinzi Yanagihara: On the Dajutu or the Arithmetic Series of Higher Orders as Studied by Wasanists.—The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 14, pp. 305.

(註12) 三上義夫和算史概觀, 日本東京物理學校雜誌別刷十九葉, 明治四十三年.

三上義夫文化史上ヨリ見タル日本ノ數學, 哲學雜誌第三十七卷四百二十三號四十三葉.

梅文鼎年譜

序：梅文鼎與牛頓，關孝和並時，其整理四算，佳惠後學，厥功甚偉；且行年三十，方學歷算，而終身用力從事，至老不倦，尤屬可欽．其事蹟散見各書，爰爲比次，彙成年譜，俾便參考．其並世國中算學家著述大略，與歷算事實，附記另行，并冠單圈爲誌．

向曾徵訪梅氏宗譜，而所得未如所期．文鼎事蹟，因多存疑之處，願海內明達，進而教之．

年譜

明崇禎六年癸酉(1633)一歲．

是年夏歷二月初七日亥時，梅文鼎[1]生於安徽宣

---

(1) "梅定九，名文鼎，號勿菴，宣城人，有歷算全書"，見陸燿切問齋文鈔，第二四卷，第四頁，乾隆四〇年(1775)自序刻本．或參看李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第七二頁，上海商務印書館出版，民國八年(1919)一一月．

城[2].

五續疑年錄[3]稱"梅定九,文鼎正錄[4]明崇禎六年癸酉生,康熙六十年辛丑卒. 名人年譜同. 補錄[5]萬歷元年癸酉生,順治十八年辛丑卒. 案清國史館本傳,儒林傳藁,文獻徵存錄幷云康熙六十年卒,補錄誤".

○前五年(1628)王錫闡[6]生,年六歲[7].

---

(2) 民國七年(1918)由宣城教育會劉至純君寄來甯國縣梅柏溪君所贈梅氏宗譜文鼎公本傳,穀成公事略,及縣志中梅文鼎傳. 本條卽據梅氏宗譜.

(3) 閔爾昌五續疑年錄,附錄一,第四頁,北京家刻本,民國七年(1918).

(4) 正錄卽錢大昕疑年錄,參看第四卷,第二一頁,鈔本,莫友芝舊藏.

(5) 補錄,卽錢椒補疑年錄,參看第四卷,第一頁,道光一八年(1838)刻.

(6) "王寅旭,名錫闡,號曉菴,吳江人,有困亨齋集",見陸燿切問齋文鈔,第六卷,第一〇頁.

(7) 三續疑年錄,據王濟撰墓誌,見陸心源三續疑年錄,第八卷,補遺,第四册,第二三頁,光緒五年(1879)自序刻本.

○前三年(1630)鄧玉函[8] (Terenz, Jean) 卒, 年未詳.

○前二年(1631)李之藻[9]卒, 年未詳.

○是年徐光啟[10]卒, 年七十二.

崇禎七年甲戌(1634)二歲.

○是年明室以李天經[11]繼徐光啟督修歷法.

---

(8) "鄧玉函者, 德國之干司但司人也. 天啓元年(1621)來華. 崇禎二年七月(1629)徐光啓薦鄧玉函同修歷法. 次年(1630)四月卒", 語見格致彙編第五年冬季册, 西歷1880年冬出版利瑪竇湯若望二君傳略內. 明史, 第三二六卷, 稱"玉函熱而瑪尼國人".

(9) "李之藻字振之, 號涼庵, 仁和人. ……天學初函之藻所彙刻也. 崇禎四年卒於官". 見阮元疇人傳, 第三二卷, 第一……五頁, 觀我生室彙稿本.

(10) "徐光啓字子先, 上海人, ……從西洋人利瑪竇學天文歷算火器", 見明史, 第二五一卷, 第四頁, 上海中華書局印本, 民國一二年(1923). 又"徐元扈(七二), 光啓, 生嘉靖四一年(1562)壬戌, 卒崇禎六年(1633)癸酉", 見錢大昕疑年錄, 第三卷, 第一九頁, 鈔本, 莫友芝舊藏.

(11) "李天經字長德, 趙州人", 見阮元疇人傳, 第三三卷, 第一……一二頁, 觀我生室彙稿本.

其年，成歷書六十一卷；前後共成書一百三十七卷（內有一架，一摺幷稱卷）。明史藝文志作一百二十六卷，是爲崇禎歷書[12]。

崇禎九年丙子（1636）四歲.

○"羅雅谷[13]（Rho, Giacomo）爲意國米蘭人．崇禎九年（1636）三月卒，歷法全歸（湯）若望[14]推步[15]．

崇禎十四年辛巳（1641）九歲.

---

(12) 語見李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第六九頁.

(13) "羅雅谷字味韶，天啓末年入中國"，阮元疇人傳，第四四卷引新法算書.

(14) "湯若望者，日耳曼之哥倫人也．精歷法，通格致．明崇禎二年（1629）入中國，習華文．時禮部奏請開局修改歷法，徵若望供事，數年．勤勞局事．著交食諸書數種．經徐光啓李天經前後進呈"．見格致彙編第五年冬季册，西歷1890年冬出版，利瑪竇湯若望二君傳略內.

(15) 語見利瑪竇湯若望二君傳略，格致彙編（1890）.

按 Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I, p. 436 (1923) 謂羅雅谷1593年生於米蘭，1638年西四月卒於北京.

"文鼎九歲熟五經,通史事,有神童之目(16)."

"父士昌,號繊聞,改革後,棄諸生服……文鼎兒時侍父及塾師羅王賓,仰觀星氣,輒了然於次舍運旋大意(17)."

崇禎十五年壬午(1642)十歲.

○是年日本關孝和(18)(1642—1708)生.

英國牛頓(19)(Newton, Sir Isaac)(1642—1727)生.

清順治二年乙酉(1645)十三歲.

---

(16) 語見梅氏宗譜.

(17) 語見梅文鼎傳上,杭世駿道古堂文集,第三〇卷,第七册,第一頁,光緒一四年(1888)汪氏振綺堂補刻本.

(18) "關孝和號自由,稱新助.爲人穎敏,尤好數術.精天文律曆,時稱爲算聖.撰著數十種.門人數百人".見關孝和之墓碑條,遠藤利貞日本數學史,第四三七頁,日本東京岩波書店出版,大正七年(1918)九月.

(19) "牛頓生於Lincolnshire,受教育於Trinity大學.發見微分學,二項式定理等算學要理.Universal Arithmetic一書由代數學方程式之理論,及雜問而成".見數學小史,外篇之部,趙繚數學辭典,第七九四……七九六頁,上海羣益書社出版,民國一二年(1923).

○“順治二年六月若望上言,於明崇禎年間曾用西洋新法,製測日月星晷定時攷驗諸器,近遭賊燬,臣擬另製進呈,今先將本年八月朔食,照新法推步,……往往不誤.得旨,欽天監印信著湯若望掌管,所屬官員嗣後一切占候選擇,悉聽舉行.累加太僕太常寺卿,勅賜通微教師,入覲禮儀,全行蠲免[20]”.

順治四年丁亥(1647)十五歲.

“文鼎是年補博士弟子員[21].”

順治五年戊子(1648)十六歲.

○是年陳厚耀[22](1648-1722)生.厚耀著有續增新法比例四十卷[23].

(20) 語見利瑪竇湯若望二君傳略,格致彙編(1890).

(21) 語見梅氏宗譜.

(22) 陳厚耀字泗源,號曙峯,泰州人也.康熙丙戌(1706)李光地薦厚耀通歷法.厚耀曾受教於文鼎.康熙壬寅(1722)卒,年七五.語見阮元疇人傳,第四十一卷,第一○五頁,觀我生室彙稿本.

(23) 豐順丁氏日昌持靜齋藏書鈔本.見劉鐸古今算學書錄,總數第三,第一四頁,光緒二四年(1898)上海算學書局石印本.

順治六年己丑(1649)十七歲.

〇是年艾儒略[24] (Aleni, Jules) 卒.

順治七年庚寅(1650)十八歲.

〇是年陳訏[25] (1650–1732) 生, 著有句股述二卷 (1683), 句股引蒙五卷 (1722)[26].

順治十一年甲午(1654)二十二歲.

是年龍華民[27] (Longobardi Nicolao) 卒.

---

(24) 艾儒略一作艾如略, 見明史第三二六卷. 意人, 萬歷壬寅(1602)來華, 語見利類思不得已辯, 第四六頁, 1847年重刻本.

(25) 陳訏字言揚, 海甯人, 傳黃宗羲籌算句股之學. 句股術及句股引蒙諸書, 俱鏤版藏於家. 生於順治庚寅(1650)五月一九日, 歿於康熙壬子(1722)七月二四日. 語見海甯陳氏宗譜, 民國一四年(1925)由海甯圖書館朱倚君向陳達齋君徵得.

(26) 李儼所藏嘉慶二年守仁堂重刊本句股引蒙, 無卷數. 四庫本作五卷, 見壬子文瀾閣所存書目, 第三卷, 第二二頁, 通行本.

(27) 龍華民, 意大里亞國人, 語見明史, 第三二六卷. 萬歷二五年(1597)來華, 順治一〇年(1655)卒.

龍華民以1565年生於西西利 Sicily 之 Calatagirone, 1655年西曆一二月一一日卒於北京. 見 Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I. p. 436, (1923).

順治十四年丁酉(1657)二十五歲.

〇是年已革回回曆官吳明烜,疏言若望所推天象之謬.并上是年回回曆,推算天象之書.請立回回科,以存絕學.後經實測,明烜所指皆妄.禮部議其罪,援赦從免[28].

順治十六年己亥(1659)二十七歲.

遂安毛際可(1633-1708)[29]梅先生傳,稱"文鼎年二十七,師事前代逸民竹冠道士倪觀湖,受麻孟璿所藏臺官交食法,即爲訂補註釋,成曆學駢枝

(28) 參看續文獻通考,第二五六卷,第三……六頁,浙江書局,光緒一三年(1887).

(29) "毛會侯名際可,號鶴舫,遂安人.順治戊戌進士,知樂城浚儀二縣,有安序堂集".見陸耀切問齋文鈔,第七卷,第一九頁,乾隆四年(1775)自序刻本."毛會侯(七六)際可,生崇禎六年癸酉(1633),卒康熙四七年戊子",見陸心源三續疑年錄第八卷,第一九頁.

按倪觀湖即倪正."倪正清宣城人,字方公……尤精天文曆算,梅文鼎嘗從受交食法".見中國人名大辭典補遺第一二頁.上海商務印書館,民國一四年(1925)五版.

四卷,竹冠歎服,以爲智過於師云[30]".

○是年楊光先(1597－?)[31]作"闢邪論上",反對天主教.是年五月又作"摘謬十論",并見不得巳上卷[32].

順治十七年庚子(1660)二十八歲.

○順治十七年十二月初三日楊光先呈書禮部正國禮,未准[33].

順治十八年辛丑(1661)二十九歲.

文鼎稱"是年始從同里倪竹冠先生,受交食通軌,

---

(30) 傳附勿菴歷算書目後,第一……二頁.勿菴歷算書目題宣城梅文鼎定九撰,孫穀成,玉汝,校正.康熙四一年(1702)梅文鼎自序乾隆年歙縣鮑廷博(1728－1814)刻入知不足齋叢書第一九集.

(31) 楊光先字長公,歙縣人,康熙三年(1664)上請誅邪教狀,時年六八歲,著不得巳上下卷,見不得巳,李儼藏傳鈔本.

(32) 楊光先不得巳,上卷,第一七……二九頁,又第五八……六五頁.李儼藏傳鈔本.末有錢大昕,黃丕烈,錢綺題跋.

(33) 見不得巳上卷.

歸與文鼐[34]，文鼏[35]兩弟習之，稍稍發明其立法之故，并爲訂其訛誤，補其遺缺，得書二卷，[36]以質倪師，頗爲之首肯，自此遂益有學歷之志".[37]

○是年方中通[38]作數度衍凡例[39].

(34) "梅文鼐字和仲，與兄文鼎共成步五星式六卷，早卒"見杭世駿道古堂文集，第三一卷，第九頁.

(35) "梅文鼏字爾素，輯經星中西同異考一卷，授時步交食式一卷"，見杭世駿道古堂文集，第三一卷，第九頁.

(36) 魏刻歷算全書作四卷，毛際可梅先生傳亦作四卷. 道古堂文集第三〇卷則作二卷. 勿菴歷算書目亦作二卷. 夾註中又題"少參三韓金鐵山先生刻於保定". 故疇人傳第三七卷因謂"歷學駢枝二卷，後增爲四卷". 梅氏叢書輯要卷首，校閱助刻姓氏列"三韓貴州巡撫，金公鐵山世揚校刊歷學駢枝，筆算於保定". 今浙江圖書館藏有康熙丙戌(1706)年金世揚上參刊本筆算五卷.

(37) 見知不足齋叢書本勿菴歷算書目，第一頁.

(38) "方中通字位伯，一作位白，桐城人. 著有數度衍二十六卷"，見與梅定九書. 數度衍光緒庚寅(1890)太原王氏重校刊於成都.

(39) 數度衍凡例作於順治辛丑(1661)，藏篋中者，近三十年，康熙丁卯(1687)歲，其壻胡正宗爲刻於粵之恩州. 是書題二六卷，兩江總督採進本作二四卷，附錄一卷. 蓋以卷首三卷併爲一卷. 道古堂文集作二五卷. 文鼎稱"數度衍於九章之外蒐羅甚富". 見勿菴歷算書目，第四五頁.

康熙元年壬寅(1662)三十歲.

是年成歷學駢枝四卷,自序於陵陽之東樓[40].

按康熙元年(1662)歷學駢枝,序稱壬寅(1662)之夏,獲從竹冠倪先生,受臺官通軌,大統歷算交食法[41].康熙三十三年中西經星同異攷則稱年近三十[42].而勿庵歷算書目則稱順治辛丑(1661),鼎始從同里倪竹冠先生受交食通軌[43].遂安毛際可梅先生傳,則稱年二十七(1659)師事前代逸民竹冠道士,倪觀湖[44].道古堂文集[45]及阮元疇人傳[46]因之.毛氏作傳,不逮梅氏自記之確,而勿菴歷算書目追記往事,當亦不及元年歷學駢枝序之近.

---

(40) 陵陽山在安徽宣城縣城內.

(41) 歷學駢枝自序,第一頁,宣城梅定九先生著.歷算全書柏鄉魏念庭輯刊,雍正元年(1723).

(42) 見中西經星同異考.

(43) 勿菴歷算書目,第一頁.

(44) 勿菴歷算書目,梅先生傳,第一……二頁.

(45) 道古堂文集,第三〇卷,第一頁.

(46) 阮元疇人傳,第三七卷,第一頁.

前拙著中國數學源流考略,因亦採壬寅三十歲師事倪觀湖之說[47].

梅文鼎中西經星同異考序稱"蓋自束髮受經於先君子,塾師羅王賓先生,往往於課餘晚步時,指示以三垣列舍之狀.余小子自是知星之可識,而天爲動物;尋以從事制義,未遑精究,心竊好之.不幸先君子見背,營求葬地,不暇以他爲.無何余小子忽忽年近三十,……"[48]是文鼎父士昌蓋卒於文鼎三十歲前也.

康熙三年甲辰(1664)三十二歲.

甲辰方田通法序稱"客歲之冬,從竹冠先生飲令弟樂翁所.得觀先生捷田歌訣,離奇出沒.……今年春,里中有事履畝,或見問桐陵[49]法,遂出斯編

(47) 李儼中國數學源流考略,北京大學月刊,第一卷,第五號,第七二頁

(48) 見中西經星同異考.

(49) 日本關孝和遺著括要算法(1709)卷首,求周徑率;謂桐陵法周率六三,徑率二〇,周數三一五整.疑與由所題同屬一人,而爲明季際者也.

相質,命曰方田通法云(50)".

○是年薛鳳祚(51)自序天學會通中"舊中法選要(52)".

○是年七月楊光先上請誅邪教狀於禮部,八月初六會審湯若望等一日,初七日放楊光先寧家(53). 利類思(54) (Buglio, Louis) 不得已辯(1665)自序,稱"甲辰冬,楊光先著不得已等書,余時方羈紲待罪(55)".

康熙四年乙巳(1665)三十三歲.

---

(50) 方田通法序附筆算,第五卷梅氏叢書輯要,第五卷,第四頁.

(51) "薛儀甫名鳳祚,益都人,有歷學會通,河防輯要",見陸耀切問齋文鈔,第二四卷,第一五頁.

(52) 見陸耀切問齋文鈔,第二四卷,第一五……一六頁.

(53) 見不得已,上卷,第一……四頁.

(54) "利類思意大利人,崇禎一〇年(1637)來華,康熙二二年(1684)卒於北京". 見張蔭麟明清之際西學輸入中國考略附錄,清華學報第一卷,第一期,第六八……六九頁間,民國一三年(1924)六月北京清華學校出版.

(55) 不得已辯,序,第一頁,1847年重刻本.

○是年四月楊光先授爲欽天監右監，辭職，不准．五月到監供事，同月再辭．六月三辭，同月又辭．始終不准．七月又將張其淳降級爲左監，楊光先補爲監正．李光顯爲右監．錢琦跋不得已，稱光先"不久卽以置閏錯誤，坐論大辟，蒙恩旨赦歸，中途爲西洋人毒死，而後西法復行，卒不可拔[56]"．先是因楊光先之反對，致殺欽天監五官，流徙劉賈二人家屬，湯若望僅獲赦免[57]．

○是年利類思自序不得已辯．此書題西士利類思著，仝會安文思[58] (Magalhaes, Gabriel de) 南

(56) 見不得已下卷，第三八……六三頁，及跋第二頁．

(57) 參看王先謙東華錄，康熙朝，第五卷，第五……六頁．北京欽文書局重印本，光緒一三年 (1887)；王之春國朝柔遠記第五卷，第五……六頁，廣雅書局刻本，光緒六年 (1880)；清文獻通考第二五六卷，第六頁．

(58) "安文思葡萄牙人，崇禎一三年 (1640) 入中國，康熙一六年 (1677) 卒於北京"．見張蔭麟明清之際西學輸入中國考略，附錄，清華學報，第一卷，第一期，第六八……六九頁間．

懷仁[59] (Verbiest, Ferdinand) 訂.

康熙五年丙午(1666)三十四歲.

○湯若望(Schall von Bell, Johann Adam) 卒.[60]

康熙八年己酉(1669)三十七歲.

文鼎稱"憶歲己酉桐城方位伯言籌算之善,然未見其書. 無何,家澹如兄至自都門,有所攜算籌一握,而缺算例. 余爲補之. 澹如大喜,因問余曰:能易之以直寫,不更便乎?子彥姪亦以爲然,遂如言作之,凡三易稿而後成[61]".

○康熙八年康熙帝命大臣傳集西洋人,與監官

(59) 南懷仁號敦伯,比利時Courtrai附近之Pitthem人. 1623年西曆十月九日生,1688年一月二十八卒於北京,1659年入中國. 見Bosmans, H., "Ferdinand Verbiest", Revue des quest. scientifiques, pp. 195, 375 (Brussels, 1912). 及"La problème des relations des relations de verbiest avec la Court de Russie", Annales do la Société d'Émulation pour l'étude de l'hist.……de la Flandre, p. 193 (Bruges, 1913).

(60) 湯若望,日耳曼之哥倫(Cologne)人. 生於1591年,至1666年西曆八月十五卒於北京. 以1622年入中國. 見Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I. p. 436 (1923).

(61) 見勿菴歷算書目第三八頁.

質辯．南懷仁因言吳明烜所造康熙八年歷之誤．帝命大學士圖海等同赴觀象臺測驗．明烜所造果誤．圖海等請將康熙九年歷書交南懷仁推算．欽天監正馬祐等又力辯前此楊光先所指摘西法之不當．帝乃詔後用西洋新法[62]．

○是年南懷仁改造觀象臺儀器,成新儀六式[63]．

康熙十一年壬子(1672)四十歲．

妻□氏卒[64]．

方程論六卷成於是年之冬[65]．

按中西經星同異攷序稱"年近三十,始從倪觀湖

---

(62) 參看清文獻通考,第二五六卷,第六……九頁．

(63) 參看清通志,第二三卷,第一頁及第一二頁,浙江書局本,光緒一三年(1887)．

(64) 歷算全書方程論第一卷發凡,第四……五頁,稱"歲壬子拙荆見背"．毛際可稱其"中年喪妻,更不復娶"．見勿菴歷算書目,第二頁．

(65) 歷算全書方程論,第一卷文鼎自序,第一頁,稱"論成於壬子之冬"．

先生受臺官通軌算交食法……如是者數年，而和仲(文鼐)已前卒久矣”[66]。是文鼐蓋卒於文鼎四十歲前一兩年也。

○是年楊燝南造眞曆書一卷，實測不驗。交刑部懲治[67]。

康熙十二年癸丑(1673)四十一歲

“康熙癸丑，宣城施副使閏章[68]，總裁郡邑之志，以分野一門相屬。郡邑志中所刻，皆其稿也[69]。”是年成“寧國府志分野稿一卷(已刻志中)。康熙癸丑奉同侍講施愚山先生纂修郡乘，諸友人咸以此項見屬，因具錄歷代宿度分宮之同異及各種分野之法，皆以諸書爲徵”。是年又成“宣城縣志分野稿一卷(已刻志中)。大體同府志[70]”。

(66) 見中西經星同異考。

(67) 東華錄，康熙朝，第一二卷，第七頁。

(68) “施尙白，名閏章，號愚山，宣城人，順治己丑(1649)進士，康熙己未(1679)博學鴻詞，授林院侍講。有學餘集”。見陸耀切問齋文鈔，第二三卷，第一六頁。

(69) 見道古堂文集，第三〇卷，第八頁。

(70) 見勿菴歷算書目，第五……六頁。

康熙十三年甲寅(1674)四十二歲.

方程論六卷,是年之夏乃寫定成帙[71].

○南懷仁靈臺儀象志成於此年[72].

康熙十四年乙卯(1675)四十三歲.

文鼎嘗從金陵顧昭借鈔穆尼閣[73]天步眞原,及薛鳳祚天學會通,迄未獲交薛氏. 乙卯(1675)晤馬德稱(儒驥)諸君,始知其刻書南都,則薛氏歸已久[74].

(71) 見歷算全書方程論,第一卷,自序.

(72) 參看張蔭麟明清之際西學輸入中國考略,清華學報,第一卷,第一期,第四八頁. 文鼎稱"儀象志成於康熙甲寅,非蒙求本法",見勿菴歷算書目第一八頁.

(73) Le Rév Père Vanhée-Bibliotheca Mathematica Sinensis Pé—Fou, T'oung Pao, 1914 稱"穆尼閣爲波蘭教士". 又"穆尼閣久居白門,方中通薛鳳祚皆從之學算,薛從穆傳對數術",語見數度衍凡例,第二頁,及道古堂文集,第三一卷,第九……一〇頁. 并參勿菴歷算書目,第四〇頁.

(74) 參看勿菴歷算書目,第三三……三四頁.

是年文鼎"始購得(新法)曆書於吳門姚氏，偶缺是(比例規)[75]解".

康熙十五年丙辰(1676)四十四歲.

○是年陳訏姪陳世仁(1676－1722)[76]生. 世仁著有少廣補遺一卷[77].

○李子金[78]是年成算法通義五卷(1676). 其後續成幾何易簡集(1679), 天弧象限表(1685)[79].

---

(75) 曆算全書度算釋例第一卷原序, 第三頁, 幷參看勿菴曆算書目, 第三八……三九頁.

(76) "陳世仁字元之, 號換菴, 康熙戊子(1708)舉人, 生康熙丙辰(1676)正月二十三日, 卒壬寅(1722)二月十一日, 享年四十有七". 語見海寧陳氏宗譜, 民國十四年(1925), 由海寧圖書館朱[illegible][illegible]向陳達齋君徵得.

(77) 參看李儼中國數學源流考略, 北京大學月刊, 第一卷, 第五號, 第七三……七四頁.

(78) "李子金原名之鉉, 以字行, 鹿邑人, 柘邑增廣生. 性高尙, 隱居讀書, 博學, 贍文詞. 尤精算數………有隱山鄙事十二種". 見蔣炳歸德府志, 第二五卷, 第一四……一五頁. 乾隆甲戌(1754)官修刻本.

(79) 參看李儼中國數學源流考略, 北京大學月刊, 第一卷, 第五號, 第七三頁.

康熙十六年丁巳(1677)四十五歲.

按丁卯(1687)方中通與梅定九書,稱"目不睹足下者十年於茲. ……初遇晤金陵者四[80]". 是文鼎於此年在南京.

康熙十七年戊午(1678)四十六歲.

是年愚山侍講欲偕之入都,不果[81].

文鼎"初購曆書佚此卷(卽比例規解). 戊午,黃俞邰[82]太史,爲借到皖江劉潛柱先生本,乃鈔得之. 頗多譌誤,殊不易讀. 蓋攜之行笈半年,而通其指趣[83]"。

"戊午秋,介亡友黃俞邰太史虞稷借到皖江劉潛柱先生本(比例規解)抄補之. 蓋逾時而後能通其條貫,以是正其訛闕[84]."

(80) 見數度衍卷首,與梅定九書,第一頁.

(81) 勿菴曆算書目第六頁.

(82) "黃俞邰(六三),虞稷,崇禎二年己巳(1629)生,康熙三十年辛未(1691)卒",見續疑年錄,第四卷,第一一頁.

(83) 曆算全書度算釋例第一卷原序,第四頁.

(84) 勿菴曆算書目第三八……三九頁.

"古算書載程大位算法統宗者,惟劉徽九章尙有宋版.鼎嘗於黃俞邰處見其方田一章.算書中此爲最古[85]".是年九月自序所著籌算二卷[86].

康熙十八年己未(1679)四十七歲.

文鼎稱"己未愚山奉命纂修明史,寄書相訊,欲余爲曆志屬稿.而余方應臬臺金長眞先生之召,授經官署,因作此(卽曆志贅言一卷)寄之[87]".

"己未與山陰友人何奕美言測算之理,爲作渾蓋地盤.而苦之銅工,爰作此(璇璣)尺以代天盤[88]……".

(85) 勿菴歷算書目第四四頁.黃俞邰所藏宋元豐七年(1084)本九章後歸毛扆(1640-?).見康熙甲子(1684)毛扆算經跋,附緝古算經後.知不足齋叢書第八集.戴敦元九章算術細草圖說序,以爲定九未見九章,蓋屬失考.

幷參看黃虞稷,周在浚徵刻唐宋祕本書目第一七頁,長沙葉氏刻本.

(86) 歷算全書,籌算第一卷自序,第一頁.

(87) 勿菴歷算書目,第六頁.

(88) 勿菴歷算書目,第三〇頁,"璇璣尺解一卷"條.

"己未始爲山陰友人何奕美作尺,亦稍以己意增損推廣之,而未暇爲立假如[89]"。

康熙十九年庚申(1680)四十八歲.

文鼎稱"表景生於日軌之高下,而日軌又因於里差.獨四省者陝西河南北直江南也.……或當初只此四處耶.然其中亦有傳訛之處.庚申歲,余養痾白下,西域友人馬德稱儒驥以此致詢.遂爲訂定,并附用法,以補其缺[90]"。

文鼎稱"歲庚申晤桐城方素伯中履[91]見鼎所作尺,驚問曰,君何從得此.蓋家兄久欲爲此而未能.履遊豫章拾得遺本,寄之,乃明厥製耳[92]"。

梅文鼎薛鳳祚本不相聞知[93],是年因汪發若先

(89) 曆算全書,度算釋例,第一卷原序,第三……四頁.

(90) 勿菴歷算書目,第一二……一三頁,"四省表景立成一卷"條.

(91) "方中履字素伯,中通三弟,曾序數度衍",見數度衍卷首,家序,第一……三頁.

(92) 勿菴歷算書目,第三八……三九頁.

(93) 勿菴歷算書目,第三四頁.

生燦作宰緇川託致一書,而薛(鳳祚)先生方病革,遂未奉其回示[94]".

康熙二十年辛酉(1681)四十九歲.

是年夏歷四月初二日亥時,長孫瑴成生[95].

○是年江永[96](1681—1762)[97]生.

○杜知耕[98]是年著數學鑰六卷(1681),又作幾何論約七卷(1700).文鼎著方程論,曾與知耕

---

(94) 仝上.

(95) 語見梅氏宗譜.

(96) "江永字愼修,婺源人,因梅文鼎歷算全書爲之發明訂正,作數學八卷續一卷等書",見中西算學叢書初編第一四,……一九册,上海鴻寶石印本光緒二二年(1896).

(97) "江愼修(八二)永,康熙二十年辛酉(1681)生,乾隆二十七年壬午(1762)卒". 見錢大昕疑年錄第四卷,第二二頁,鈔本,莫友芝舊藏.

(98) "杜知耕字端甫,康熙丁卯(1687)舉人……好讀書,尤精數學.著有數學鑰六卷.李子金序而傳之". 見何焆柘城縣志第一○卷,第一○……一一頁,乾隆三八年(1773)官修刻本.文鼎稱"杜端甫數學鑰圖註九章,頗中肯綮". 見勿菴歷算書目第四五頁.

及孔興泰[99]，袁士龍[100]共相質正，乃重加繕錄，以爲定本[101].

康熙二十一年壬戌(1682)五十歲.

勿菴籌算七卷，宣城梅定九先生著. 康熙□□□年蔡璣先刻於金陵. 後江常鎮道魏公荔彤重刻於歷算全書內[102]. 文鼎稱"友人蔡璣先見而悅之，爲雕版於金陵[103]".

---

(99) "孔興泰字林宗，睢州人. 著大測精義，求半弧正弦法與梅氏正弦簡法補說，不謀而合". 見杭世駿道古堂文集第三一卷，第三一頁. 並參看勿菴歷算書目第四七……四八頁.

(100) "袁士龍字惠子，錢塘人，受星學於黃弘憲. 西域天文有三十雜星之占，未譯中土星名. 士龍有考，與梅氏不謀而合". 見杭世駿道古堂文集第三一卷，第三一頁. 並參看勿菴歷算書目第一二及二二頁.

(101) 見歷算全書方程論第一卷發凡，第四頁.

(102) 見梅穀成增刪算法統宗卷首，古今算學書目，第一一頁，江蘇書局校刻，光緒戊戌(1898).

(103) 見勿菴歷算書目第三八頁.

"金陵文學蔡君璣先璿,於康熙二十□年,首刻籌算於金陵[104]".

"蔡璿字璣先,江寧人.從文鼎學算爲刻中西算學通[105]".按施彥恪徵刻歷算全書啓,亦稱,"惟昔璣先蔡子,首鋟籌算於白門[106]".觀此則梅氏算籍之見於雕版者,籌算爲最先時在康熙二十年以後也.

是年長夏述輕重比例三線法[107].

○是年王錫闡卒,年五十五[108].

---

(104) 見梅氏叢書輯要卷首,校閱助刻姓氏.

(105) 見杭世駿道古堂文集,第三一卷,張一四頁.按中西算學通乃以勿菴籌算七卷爲第一書,勿菴筆算五卷爲第二書,勿菴度數二卷爲第三書,比例數解四卷爲第四書,三角法舉要五卷爲第五書,方程論六卷爲第六書,幾何摘要三卷爲第七書,句股測量二卷爲第八書,九數存古十卷爲第九書.參看勿菴歷算書目,第三七……四四頁.蔡璿所刻,祇中西算學通之第一種也.

(106) 見勿菴歷算書目啓第三頁.

(107) 見歷算全書度算釋例,第二卷,第五〇頁.

(108) "王曉庵(五五)錫闡,生崇禎元年戊辰,卒康熙二十一年壬戌",見陸心源三續疑年錄,第八卷,第二四頁,引王濟撰墓志.

康熙二十三年甲子(1684)五十二歲.

文鼎稱"康熙甲子制府于(成龍)[109]公,檄修通志,鼎以事辭,未往. 皖江太史陳默公先生焯專函致書,以江南分野稿見商,介家叔瞿山清督促至再. 余方病瘧小愈,力疾爲之潤色,頗費經營. 無何,默翁亦辭志局矣. 聊存玆稿[110]". (卽江南通志分野擬稿一卷).

道古堂文集,梅文鼎傳於康熙癸丑(1673)句下稱,"明年制府于成龍檄修通志,亦以分野相屬,力疾成稿,而志局易人,存於家[111]",蓋誤記也.

(109) "于北溟名成龍,永寧人,官兩江總督,諡淸端,有政書'. 見陸燿切問齋文鈔第一一卷,第五頁. "于北溟(六八)成龍,萬歷四十五年丁巳(1618)生,康熙二十三年甲子(1684)卒",見錢椒補疑年錄,第四卷,第八頁. 陸心源案經義齋集有墓誌.

(110) 見勿菴歷算書目,第七頁.

按梅清,1620年生,1697年卒,見三續疑年錄卷之八,第一七頁.

(111) 見道古堂文集,第三〇卷,第八頁.

按"康熙二十年于成龍由直隸巡撫,遷爲江南江西總督",見東華錄康熙二八,第八頁. 則檄修通志,不在癸丑之明年,明甚.

是年自序弧三角舉要於柏梘山中[112].

康熙二十五年丙寅(1686)五十四歲.

潘耒[113]序方程論稱"吾邑有隱君子曰：王寅旭先生,深明歷理,兼通中西之學. 余少嘗問歷焉. ……今寅旭亡久矣. 余徧行天下,求彷彿其人者,而不可得. 歲丙寅過宣城,始得梅子[114]".

文鼎稱"吳江王寅旭先生錫闡,深明算術,著撰極富. 初太史潘稼堂先生爲鼎稱述之……鼎嘗評近代歷學以吳江爲最. 識解在青州以上. 惜乎不能蚤知其人與之極論此事. 稼堂屢相期訂,欲盡致王書,屬余爲之圖註,以發其義類,而皆成虛約,生平之一憾事也[115]".

---

(112) 見歷算全書,弧三角舉要,舊序,第一……二頁.

(113) "潘耒字次耕,吳江人,王錫闡與其兄檉章. 館於其家,講論嘗窮日夜,勸其學歷……",見道古堂文集第三一卷,第一三頁. "潘次耕名耒,號稼堂,吳江人,康熙己未(1679)博學鴻詞. 以布衣入翰林,官檢討,有遂初堂文集". 見切問齋文鈔,第一五卷,第一六頁.

(114) 見梅氏叢書輯要第一一卷,方程論敍,第一頁.

(115) 見勿菴歷算書目,第三四……三五頁.

○是年莊亨陽(1686—1746)生[116].著有莊氏算學八卷[117].

○是年陳訏子陳世佶(1686—1749)[118]生.著有弧矢割圜一卷,開方捷法一卷[119].句股演法一卷,少廣補遺發明一卷[120].又校閱其父所著句股引蒙五卷.

康熙二十六年丁卯(1687)五十五歲.

文鼎於方程著論校刻緣起稱"歲丁卯薄遊錢塘,

---

(116)"莊復齋(六一),亨陽,生康熙二十五年丙寅(1686),卒乾隆十一年丙寅(1746)",見陸心源三續疑年錄,第九卷,第七頁引留溪集.

(117)李儼所藏光緒己丑(1889)刊秋水堂算法(卽莊氏算學),無卷數.內分八種,第一種爲梅勿菴開方法.四庫著錄爲八卷.

(118)"陳佶,字士常,號純齋,陳訏第六子,康熙癸巳(1713)舉人,生康熙丙寅(1786)二月六日,卒乾隆己巳(1749)二月二十五日,享年六十有四",見海寧陳氏宗譜.

(119)錢寶琮藏開方捷法一卷,弧矢割圜一卷,陳世佶輯,玄孫塈校刊一册.

(120)詳見裘冲曼所編天文算學書目彙編(未刊).

同里阮於岳鴻臚付貲授梓，屬以理裝北上，未遂殺青[121]”.

又於勿菴歷算書目稱‘初稼堂貲余此書(卽方程論)，阮副憲于岳爲付刻貲，而余未及爲. 嘉魚明府李安卿鼎徵[122]乃刻於泉州[123]”.

是年方中通有與梅定九書[124].

康熙二十七年戊辰(1688)五十六歲.

毛際可稱“曩者歲在戊辰，余與梅定九先生晤於西湖. 遂傾蓋定交，日載酒賦詩. 余爲題其飲酒讀書圖而別[125]”.

梅文鼎亦稱“是年自武林歸[126]”.

---

(121) 見歷算全書方程論第一卷發凡，第四頁.

(122) “李鼎徵，字安卿，文貞公(李光地)次弟，舉人，嘉魚令. 爲梅氏刻方程論於泉州. 幾何補編成，手爲謄寫”. 見道古堂文集，第三一卷，第一三頁.

(123) 見勿菴歷算書目，第四三頁.

(124) 見方中通數度衍卷首與友書，第一……四頁，太原王氏重校，刊於成都，光緒庚寅(1890).

(125) 見勿菴歷算書目傳，第一頁.

(126) 見中西經星同異考.

○是年南懷仁(Verbiest, Ferdinand)卒[127].

康熙二十八年己巳(1689)五十七歲.

是年入都,獲交李光地(1642–1718)[128].

在京續遇無錫顧景范(祖禹),北直劉紀莊(獻廷),嘉禾徐敬可(善),朱竹垞(彝尊),淮河閻百詩(若璩),寧波萬季野(斯同)[129].

是年"始從嘉禾徐敬可善鈔得王錫闡圜解一卷,爲之訂其缺誤.又續讀其測食諸稿,曆法書二卷,幷其所定大統法及三辰儀晷,加以附論,成王寅旭書補註[130]".

---

(127) 見注59.

(128) 見勿菴曆算書目,第一四頁."李晉卿名光地,號厚菴,安溪人.康熙庚戌(1670)進士.官大學士.謚文貞.有榕邨集".見陸耀切問齋文鈔第一卷,第一三頁."李晉卿(七七),光地.明崇禎一五年壬午(1642)生,(清)康熙五十七年戊戌(1718)卒".見吳修續疑年錄第四卷,第四三頁,鈔本,吳友芝舊藏.

(129) 參看歷算全書方程論,第一卷發凡,第四頁.

(130) 參看勿菴曆算書目,第三四……三五頁.

在都門成明史歷志擬稿三卷[131]，手自步算，凡篝燈不寢者二月．黃宗羲(1610—1695)[132]子百家[133]於此時從問歷法[134]．

方苞作文鼎墓表，稱"劉輝祖嘗與同舍館，告苞曰，吾每寐，覺漏鼓四五下，梅君猶篝燈夜誦，昧爽則已興矣[135]"．

是年與廣昌揭暄通訊，摘錄其所寄寫天新語草稿，成寫天新語鈔存一卷[136]．

康熙二十九年庚午(1690)五十八歲．

---

(131) 按大統歷志四庫本作八卷，附錄一卷　刊入明史作四卷．而勿菴歷算書目作明史歷志擬稿三卷．

(132) "黃太冲(八六)宗羲，明萬歷三八年庚戌(1610)生，(清)康熙三四年乙亥(1695)卒"．見錢大昕疑年錄，第四卷，第二〇頁，鈔本，莫友芝舊藏．

(133) "黃百家，字主一，餘姚人．著句股矩測解原上下卷"．參看勾股矩測解原．

(134) 參看勿菴歷算書目，第七……八頁．

(135) 道古堂文集，第三一卷，八頁引．

(136) 參看勿菴歷算書目，第三六頁．

是年潘耒序文鼎所著方程論[137].

文鼎稱"庚午蜡月既望,晤遠西安先生,談及算數,云量田可以不用履畝[138]".

康熙三十年辛未(1691)五十九歲.

是年夏,移榻於中街李光地寓邸,始着手作歷學疑問.如是數月,得稿三十餘篇,授徒直沽,又陸續成其半[139].

是年與滄州老儒同客天津[140].

康熙三十一年壬申(1692)六十歲.

文鼎稱"劉文學介錫,滄洲老儒也.頗留心象數.辛未,壬申與余同客天津.承有所問,並據歷法正理告之".成答劉文學問天象一卷[141].

壬申春月,文鼎偶見館童屈篾爲燈,詫其爲有法

(137) 見梅氏叢書輯要,第一一卷,第一頁.

(138) 見歷算叢書,句股闡微,第四卷,第二一頁.

(139) 見勿菴歷算書目,第一四……一五頁.

(140) 見勿菴歷算書目,第一三頁.

(141) 見勿菴歷算書目,第一三頁.

之形. 因以測量全義[142], 幾何原本[143] 量體諸率, 攷其根源, 成幾何補編四卷[144].

文鼎稱"歲壬申, 余在都門, 有三韓林□□寄訊楊時可及丁介調, 屬問四乘方, 十乘方法, 因稍爲推演, 至十二乘方, 亦有條而不紊". 成少廣拾遺一卷[145].

文鼎又稱"嘗見九章比類[146], 歷宗算會[147], 算法

---

(142) 測量全義十卷, 明徐光啓, 與羅雅谷, 湯若望共編. 明崇禎四年 (1631) 八月第二次進呈, 爲崇禎曆書之一.

(143) 幾何原本六卷, 明徐光啓與利瑪竇共譯, 萬歷三十五年 (1607) 春譯成, 並在京出版.

(144) 參看勿菴歷算書目, 第四六頁, 及歷算全書幾何補編, 自序第一頁.

(145) 見勿菴歷算書目, 第四五頁.

(146) 文鼎稱"錢塘吳信民九章比類, 西域伍爾章遵韜有其書, 余從借讀焉". 見勿菴歷算書目, 第四四頁.

"九章比類算法, 景泰庚午 (1450) 錢塘吳信民作, 共八本". 見算法統宗卷一三.

(147) 文鼎稱"山陰周述學著歷宗算會, 於開方, 弧矢, 頗詳". 見勿菴歷算書目, 第四四頁. 李儼藏鈔本歷宗算會一五卷八册, 前有嘉靖戊午 (1558) 周文燭撰序.

統宗(148)俱載有開方作法之圖，而僅及五乘，……．同文算指(149)稍變其圖，具七乘方算法……西鏡錄演其圖爲十乘方(150)，……康熙壬申余在都門，有友人傳遠問，願詢四乘方十乘方法……(151)”．是年秋在北京，晤袁士龍(152)．

康熙三十二年癸酉(1693)六十一歲．

是年二月自序所撰筆算五卷(153)．

(148) 算法統宗十三卷，明新安程大位撰．萬歷癸巳(1593)浙江吳繼綬爲之序．

(149) 同文算指前編二卷，通編八卷，別編一卷，題利瑪竇授，李之藻演．刻於天學初函．前編有萬歷癸丑(1613)李之藻序，及萬歷甲寅(1614)徐光啓序．

(150) 文鼎稱“西鏡錄不知誰作，然其書當在天學初函之後知者……寫本殊多魯魚，因稍爲之訂”．見勿菴歷算書目第四六及四七頁．

(151) 見歷算全書，少廣補遺，第一卷，小引第一頁．

(152) 見梅氏叢書輯要，第六〇卷，雜著西國三十雜星考．或歷算全書，揆日候星紀要，第一卷，第四〇頁．

(153) “見歷算全書，筆算序凡，自序第一……二頁．

是年四月李光地序所著歷學疑問[154].

子以燕中癸酉科舉人[155].

是年南旋,計去京師凡五載[156].

康熙三十三年甲戌(1694)六十二歲.

是年中秋,序其弟文鼐所著中西經星同異攷,其後此書收入四庫[157]. 文鼐又撰南極諸星攷一卷,刻入檀几叢書[158]. 又刊刻利瑪竇(Ricci, Matteo)[159]所譯經天該及附圖[160].

---

(154) 見歷算全書,歷學疑問序第一……三頁.

(155) 見梅氏宗譜,及梅穀成增刪算法統宗,凡例,第一頁,江蘇書局校刻,光緒戊戌(1898).

(156) 見勿菴歷算書目,第一五頁.

(157) "中西經星同異考一卷,一册",見壬子文瀾閣所存書目第三卷,第二〇頁. 指海本,同.

(158) 檀几叢書,武林王丹麓編刻.

(159) "萬歷九年(1581)利瑪竇(1529—1610)始汎海九萬里,抵廣州之香山澳……至二八年(1601)入京師中官馬堂以其方物進獻,自稱大西洋人",見明史第三二六卷,第五頁. 上海中華書局印,民國一二年(1923). 並參看李儼中國數學源流考略,北京大學月刊,第一卷,第五號,第六八頁.

(160) 劉鐸古今算學書錄天文第七,第三頁載"經天該附圖,明利瑪竇譯,康熙年梅文鼐刊本". 按文鼐乃文鼐之誤.

康熙三十四年乙亥(1695)六十三歲.

是年文鼎由郡廩生應歲貢[161].

○是年黃宗羲卒,年八十六[162].

康熙三十五年己卯(1699)六十七歲.

是年文鼎在閩遇林同人(侗)(1627-1714)[163],借鈔其寫本古曆列星距度因成古曆列星距度考一卷[164].

是年自閩北歸,遊西湖[165].

瑴成亦稱其祖"南至閩,北抵上谷,金臺,中歷齊楚,吳,越[166]".

是年同里施彥恪譔徵刻曆算全書啓時,文鼎已

(161) 見梅氏宗譜.

(162) 見註 132.

(163) "林同人(八八),侗生天啓七年乙卯(1627),卒康熙五三年甲午(1714)". 見陸心源三續疑年錄,第八卷,第一八頁,引福建通志,參年譜.

(164) 參看勿菴曆算書目,第三六……三七頁.

(165) 見勿菴曆算書目傳,第一頁.

(166) 見梅瑴成增删算法統宗凡例,第五頁.

著歷學書五十八種，算法書二十二種共成八十種[167].

施彥恪又謂"疑問三卷見燕山節度之新刊，方程一編得泉郡孝廉而廣布[168]"，是李光地刻其歷學疑問於大名，李安卿刻其方程論於泉州，均[illegible]數年事.

康熙三十九年庚辰(1700)六十八歲.

是年中秋，偶謍寒疾，諸務屏絕，成環中黍尺五卷，重九前七日自序其書[169].

文鼎稱"十餘年前曾作弧三角，所成句股書一册，稿存兒輩行笈中，覓之不可得也. 庚辰年，乃復作此[170]"(卽正弧句股).

○杜德美(Jartoux, Pierre, 1670－1720)[171] 來中國

(167) 見勿菴歷算書目，啓，第三頁.

(168) 見勿菴歷算書目，啓，第三頁.

(169) 見梅氏叢書輯要第三四卷，環中黍尺，小引，第一頁.

(170) 見歷算全書，弧三角舉要，第二卷，第五頁.

(171) 參看李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第七〇……七一頁. 並參看梅氏叢書輯要，第六一卷，附錄一，赤水遺珍，求周徑密率捷法(譯西士杜德美法).

介紹求周徑密率捷法.

康熙四十年辛巳(1701)六十九歲.

梅穀成稱"籌算七卷,筆算五卷,平三角法五卷,弧三角法五卷,塹堵測量二卷,環中黍尺五卷,方程論六卷,以上六種,俱宣城梅先生著.安溪李文貞公併曆學疑問(三卷),曆學駢枝(四卷),交食蒙求(三卷),俱刻於上谷[172]".

穀成又稱"安溪相國李文貞公厚菴督學畿輔,校刊曆學疑問進呈御覽,有恭紀刻於本卷.又巡撫直隸,校刊三角法舉要,環中黍尺,塹堵測量等書九種於上谷[173]".

文鼎於弧三角舉要有康熙辛巳七夕前二日識語一則,是上谷九種之刻,至早在辛巳年[174].

康熙四十一年壬午(1702)七十歲.

---

(172) 見梅穀成增删算法統宗卷首,書目,第一一頁.

(173) 見梅氏叢書輯要卷首,校閱助刻姓氏.

(174) 見曆算全書,弧三角舉要第二卷,第五頁.今北京大學藏書室藏有勿菴曆算全書九種,九册.未知是否李光地刻本.

古越圖書館藏有李光地,上谷刻本;梅文鼎撰,弧三角舉要五卷.

是年十月李光地以撫臣扈蹕德州,進所刻歷學疑問三卷,文鼎以是知名[175].

是年自序所著勿菴曆算書目於坐吉山中. 計曆學書六十二種,算學書二十六種,共八十八種[176].

康熙四十二年癸未(1703)七十一歲.

文鼎稱"歲癸未,匡山隱者毛心易乾乾,惠訪山居,偶論周徑之理. 因復推論及方圓相容相變諸率,益覺精明……[177]".

文鼎又稱"癸未歲匡山隱者毛心易乾乾,偕其壻中州謝野臣(廷逸),惠訪山居,共論周徑之理,因復反復推論方圓相容相變諸率[178]".

文鼎又稱"康熙癸未,季弟爾素有比例規用法假如之作". "方爾素撰此書時,安溪相國以冢宰

---

(175) 見勿菴曆算書目,第一五頁. 及曆算全書,恭紀曆學疑問,第一頁.

(176) 參看勿菴曆算書目,知不足齋叢書本,自序第一頁.

(177) 見勿菴曆算書目,第五一頁,疑壬午以後所記.

(178) 見梅氏叢書輯要,第二四卷,方圓冪積說,第一頁.

開府上谷,公子世得,鍾倫[179]銳意歷算之學,余兄弟及兒以燕下榻芝軒[180]".

文鼎稱"授時歷於日躔盈縮,月離遲疾,並云以算術垜積招差立算,而今所傳九章諸書,無此術也.……"余因李世得[181]之疑.而試爲思之.其中原委,亦自歷然.爰命孫𣪏成衍爲垜積之圖,得書(平立定三差詳說)一卷[182].

康熙四十四年乙酉(1705)七十三歲.

是年閏夏康熙南巡,召見文鼎於德水舟次者三.進三角法舉要五卷[183].

康熙四十五年丙戌(1706)七十四歲.

---

(179) "李鍾倫字世德,文貞公(長)子,康熙癸酉(1693)舉人,……甲數乙數用法甚奇,本以赤道求黃道.鍾倫準其法以黃求赤,作爲圖論,又製器以象之".見道古堂文集,第三一卷,第一三頁.

(180) 見歷算全書,度算釋例,第一卷,原序,第三……四頁.

(181) 歷算全書平立定三差詳說,第一卷,序,第一頁,李世得作李世德,梅氏叢書輯要卷首全.

(182) 見勿菴歷算書目,第二五……二六頁.

(183) 參看梅氏宗譜及勿菴歷算書目,第四一頁.

文鼎稱"方爾素撰此(比例規用法假如)書時,安溪相國以冢宰開府上谷,……,無何爾素挈兒燕南歸,相國入參密勿.而世得亡兒相繼亡去,余亦大病瀕死,……(184)".

○是年李鍾倫卒,年四十四(185).

康熙四十六年丁亥(1707)七十五歲.

文鼎稱"爾素有比例規用法之作,又五年丁亥(1717)重加校錄,示余屬爲序(186)".

康熙四十九年庚寅(1710)七十八歲.

文鼎稱"庚寅在吳門,又得錫山友人楊崑生(定三)方圓訂註圖說,益覺精明(187)".

---

(184) 見歷算全書,度算釋例,第一卷,原序第四頁.

(185) "李世得(四四)鍾倫,生康熙二年癸卯(1661),卒康熙四十五年丙戌(1706)". 見陸心源三續疑年錄,第九卷,第四頁,引榕村集. "以燕年五十二,先文鼎卒",見宣城縣志. 錢寶琮君因文鼎有"世得亡兒相繼化去"之語,假定以燕之卒亦在丙戌年(1706),則以燕當生於順治一二年乙未(1655),文鼎二三歲.

浙江圖書館藏有康熙四五年梅文鼎筆算五卷刻本,一冊.

(186) 見歷算全書,度算釋例,第一卷,原序第三頁.

(187) 見梅氏叢書輯要,第二四卷,方圓冪積說第一頁.

文鼎又稱"庚寅之冬,偶有吳門之遊,(楊)學三(作枚)[188]同吾友秦子二南擎册過訪於陳泗源學署,出示此(楊學山歷算書)書.余亦以幾何補編相質[189]".

楊學山以遡源晷度四册,王寅旭歷書圖註二册,三角法會編二册,借文鼎[190].

康熙五十一年壬辰(1712)八十歲.

是年臘月序錫山友人楊學山歷算書於坐吉山中[191].孫穀成供奉內廷,欽賜監生[192].

康熙五十二年癸巳(1713)八十一歲.

---

(188) 楊作枚字學山,定三之孫,著有解割圓之根一卷,刻入歷算全書爲魏荔彤訂補梅勿菴歷算全書.

(189) 見歷算全書,錫山友人楊學山歷算書序第一……二頁.

(190) 見上書.

(191) 見歷算全書第一册,卷首,題三角法會編梅序第一……二頁.

(192) 見梅氏宗譜.

孫瑴成賜舉人，彙編製律曆淵源[193].

瑴成亦稱"余於康熙五十二年間充蒙養齋彙編官[194].

康熙五十三年甲午(1714)八十二歲.

○是年王元啟(1714－1786)生[195].著有句股衍，角度衍，九章雜論[196].

康熙五十四年乙未(1715)八十三歲.

是年三月十九，文鼎寄書與楊學山[197].

孫瑴成賜進士，給假省親，賜第於(北京)宣武門外

---

(193) 見梅氏宗譜. 按律曆淵源一百卷，計曆象考成上編一六卷，下編一○卷，表一六卷. 律呂正義上編二卷，下編二卷，續編一卷. 數理精蘊上編五卷，下編四○卷，表八卷.

(194) 見梅氏叢書輯要，第六二卷，操縵卮言.

(195) "王惺齋(七三)元啓，生康熙五十三年甲午(1714)，卒乾隆五十一年丙午(1786)". 見陸心源三續疑年錄，第九卷，第一一頁，引復初齋集.

(196) 見阮元疇人傳，第四一卷，第二○……二四頁，觀我生室彙稿本.

(197) 見曆算全書，曆學問答，第一卷，第三四……三五頁.

之日南坊[198].

康熙五十六年丁酉(1717)八十五歲.

是年仲冬文鼎自序所著度算釋例二卷，蓋因年希堯[199]談及尺算,乃以舊稿,幷其弟文鼏所作算例,重加參校,比校整齊而授梓人[200].

廣寧年希堯爲序度算釋例於金陵藩署[201].

康熙五十七年戊戌(1718)八十六歲.

魏荔彤稱"歲在戊戌偶攝法司,因與諸同人設館白下,延致(文鼎)先生,訂正所著.輸貲刊行.先生旣以寧澹爲志,不樂與俗吏久處.而世會變遷,雲散蓬飛,竟未卒事.閱二載,僻居海中,官齋閒寂,復馳函敬求存稿十餘種.……不意哲人遂萎矣[202]".

---

(198) 見梅氏宗譜.

(199) "廣寧廣東巡撫,年公允公(希堯)校刊方程,度算於江寧藩署". 見梅氏叢書輯要卷首,校閱助刻姓氏.

(200) 見歷算全書度算釋例,第一卷,自序,第一頁.

(201) 見歷算全書度算釋例,第一卷,年序,第一頁.

(202) 見歷算全書卷首,魏序,第一……二頁.

○是年年希堯自序測算刀圭三卷[203].

○是年陳萬策成進士[204]. 萬策曾與徐用錫[205], 魏廷珂[206], 王蘭生[207], 王之銳[208], 同校文鼎歷算書[209].

康熙五十九年庚子(1720)八十八歲.

○是年杜德美卒, 年五十一[210].

---

(203) 見李儼所藏測算刀圭三卷鈔本.

(204) "陳對初名萬策, 又字謙季, 晉江人, 康熙戊戌進士, 官詹事府詹事. 有近道齋集". 見切問齋文鈔, 第二四卷, 第一〇頁.

(205) "徐用錫字公壇, 宿遷人, 官翰林院侍讀", 參看梅氏叢書輯要, 卷首, 校閱助刻姓氏.

"徐用錫字壇長, 順治十三年(1656)生". 見續疑年錄卷四.

(206) "魏廷珍字君璧, 景州人, 官大司空", 參看上書.

(207) "王蘭生字振聲, 交河人, 官少宗伯", 參看上書.

(208) "王之銳字仲退, 河間人, 官國子監", 參看上書.

(209) 參看勿菴歷算書目, 第五〇頁, 梅氏叢書輯要卷首, 校閱助刻姓氏, 道古堂文集第三一卷, 第八頁.

(210) 參看李儼中國數學源流考略, 北京大學月刊, 第一卷, 第五號, 第七〇頁.

康熙六十年辛丑(1721)八十九歲.

是年文鼎歿[211].

"穀成內廷供奉,越數年,給假歸省,值公病,得侍疾數月而卒. 特命江寧織造曹公治喪事,營葬地[212]."

按文鼎卒時,孫穀成玕成尚健在. 穀成卒於乾隆二十八年癸未(1763)十月十六日,時年八十三[213]. 玕成卒年未詳,宗譜稱年七十四卒[214]. 穀成長子鈖,目子鈁,各年二十六,先穀成卒[215].

(211) 見梅氏宗譜.

(212) 見上書.

(213) 見上書.

(214) 見上書. 按魏荔彤雍正癸卯(1023)兼濟堂刻歷算全書序,尚稱玉汝昆季,乾隆辛巳(1721)穀成所輯梅氏叢書輯要,除第一……五卷、第五五……五六卷,及第六〇……六二卷外,均與玕成同校輯. 又庚辰(1760)所作增刪算法統宗,亦有玕成校字. 是玕成於乾隆辛巳(1721)尚健存也.

(215) 見增刪算法統宗,凡例,第五頁.